La enseñanza de las **MATEMÁTICAS** en la escuela primaria

Taller para maestros

2

Segunda parte

sep

Programa Nacional de Actualización Permanente

La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria

Taller para maestros

Segunda parte

SEP

Programa Nacional de Actualización Permanente

Presentación

La Secretaría de Educación Pública ha elaborado el presente material, que forma parte del paquete didáctico de Matemáticas, destinado a los maestros que laboran en los planteles de educación primaria.

Los *paquetes didácticos* son uno de los componentes del Programa Nacional de Actualización Permanente para maestros de educación básica en servicio, el cual desarrollan conjuntamente la SEP y las autoridades educativas de los estados; su propósito es apoyar al personal docente en la puesta al día de sus conocimientos y en el fortalecimiento de sus recursos didácticos, para que alcancen una mayor calidad en el desarrollo de su ejercicio profesional.

Los *paquetes didácticos* son el principal medio para que los maestros de los distintos niveles, grados y asignaturas realicen con éxito programas y cursos relacionados con la aplicación de los planes vigentes de educación básica.

Los maestros podrán utilizar estos materiales de diversas maneras, conforme a sus preferencias y al tiempo del que dispongan: podrán estudiar sistemáticamente de manera individual; organizar grupos autónomos con sus compañeros de trabajo; laborar en grupo con asesoría del personal de centros de formación y actualización de maestros; o participar en cursos escolarizados ofrecidos por instituciones especializadas.

La *Guía de estudio* que forma parte de este paquete didáctico será útil para que el maestro logre sistematicidad y flexibilidad en el estudio y utilización de los diversos componentes de cada paquete: las *Lecturas*, los *Libros para el maestro*, las orientaciones de autoevaluación y otros recursos complementarios.

Los maestros que así lo deseen podrán obtener la acreditación del curso al cual corresponde el presente paquete, que será

tomada en cuenta para la Carrera Magisterial y otros mecanismos de estímulo profesional. Con la finalidad de que los maestros tengan las mismas oportunidades, independientemente de la forma de estudio que hayan utilizado, la acreditación será realizada por un órgano técnico, con criterios objetivos, estandarizados y de validez nacional.

La Secretaría de Educación Pública y las autoridades educativas confían en que este material corresponda a los intereses y las necesidades reales de los maestros en servicio y que sea de utilidad en la elevación de la calidad de la educación que reciben los niños y jóvenes mexicanos.

Secretaría de Educación Pública

Índice

9 *Introducción*

Capítulo I

17 *Las fracciones*

18 **Tema 1: Las fracciones en el reparto**
18 ***Actividad 1:*** *El reparto de pasteles*
20 ***Actividad 2:*** *¿A quién le tocó más?*
22 ***Actividad 3:*** *¿Cómo era la barrita entera?*
27 ***Actividad 4:*** *Nuestros materiales de trabajo*
30 ***Actividad 5:*** *¿Qué piensan los niños de primero y segundo acerca de algunos resultados de repartos de "pastel"?*

31 **Tema 2. Las fracciones en la medición**
31 ***Actividad 1:*** *Midiendo longitudes*
35 ***Actividad 2:*** *Un juego de medición con fracciones*
36 ***Actividad 3:*** *Las fracciones en la recta*
37 ***Actividad 4:*** *¿Puede ser $\frac{1}{4}$ mayor que $\frac{1}{2}$?*
40 ***Actividad 5:*** *Partes de partes*
42 ***Actividad 6:*** *Hacia la equivalencia de fracciones*
45 ***Actividad 7:*** *La suma y la resta de fracciones*
47 ***Actividad 8:*** *Los procedimientos para sumar y restar fracciones*
49 ***Actividad 9:*** *Gana el que llega al 5*
50 ***Actividad 10:*** *Del cero al uno*
50 ***Actividad 11:*** *Multiplicando por un número entero*
52 ***Actividad 12:*** *Nuestros materiales de trabajo*

55 **Tema 3. Las fracciones decimales y la medición**
55 ***Actividad 1:*** *Fracciones binarias*
60 ***Actividad 2:*** *Nuestros materiales de trabajo*
63 ***Actividad 3:*** *Medidas y decimales*
65 ***Actividad 4:*** *Un poco más sobre números decimales*

68 **Tema 4. Las fracciones como operadores multiplicativos**
68 ***Actividad 1:*** *Tres y media vueltas*
73 ***Actividad 2:*** *La escala*
75 ***Actividad 3:*** *Operador fraccionario y medidas fraccionarias*
77 ***Actividad 4:*** *¿Qué parte de 60 000 es 25 000?*
81 ***Actividad 5:*** *¿Y la división de fracciones?*
84 ***Actividad 6:*** *Nuestros materiales de trabajo*

87 **Tema 5. Las fracciones como resultado de una división**
87 ***Actividad 1:*** *La usamos sin saberlo*
89 ***Actividad 2:*** *Volvamos al reparto de pasteles*
94 ***Actividad 3:*** *Tres problemas*
95 ***Actividad 4:*** *El paso a la notación decimal*
96 ***Actividad 5:*** *Nuestros materiales de trabajo*
98 ***¿Qué hemos aprendido en este capítulo?***

Capítulo II

103 ***Procesos de cambio***

104 **Tema 1. Variación proporcional y no proporcional**
104 ***Actividad 1:*** *Los engranes y las vueltas*
112 ***Actividad 2:*** *Los rectángulos*
116 ***Actividad 3:*** *Se hacen grandes, se hacen chiquitos*
118 ***Actividad 4:*** *Distintos razonamientos frente a un mismo problema*
124 ***Actividad 5:*** *Veamos lo que hacen los niños*

127 **Tema 2. El porcentaje**
127 ***Actividad 1:*** *Tres cuartos, tres de cada cuatro o 75%*
130 ***Actividad 2:*** *¿Nos toca dar lo mismo?*
135 ***Actividad 3:*** *Algunas maneras rápidas para calcular porcentajes*
137 ***Actividad 4:*** *Otros problemas de porcentaje*

138 **Tema 3. La proporcionalidad inversa**
138 ***Actividad 1:*** *Entre más somos, menos nos toca*
141 ***Actividad 2:*** *Nuestros materiales de trabajo*
144 ***¿Qué hemos aprendido en este capítulo?***

Capítulo III

151 ***Tratamiento de la información***

152 ***Actividad 1:*** *Informaciones diversas*
157 ***Actividad 2:*** *Nuestros materiales de trabajo*
160 ***¿Qué hemos aprendido en este capítulo?***

Capítulo IV

163 ***La predicción y el azar***

164 ***Actividad 1:*** *Nuestros materiales de trabajo*
166 ***Actividad 2:*** *El juego interrumpido*
168 ***Actividad 3:*** *Juegos combinatorios*
170 ***Actividad 4:*** *Otros problemas para pensar*
172 ***Actividad 5:*** *De colores*
175 ***Actividad 6:*** *Relaciones importantes*
178 ***¿Qué hemos aprendido en este capítulo?***

180 ***Anexo de respuestas***

199 ***Bibliografía consultada***

Introducción

Numerosos estudios sobre el aprendizaje y la enseñanza han demostrado que los niños *no son* simplemente receptores que acumulan la información que les dan los adultos, sino que aprenden modificando ideas anteriores al interactuar con situaciones problemáticas nuevas.

Desde esta perspectiva, las matemáticas deben ser para los alumnos una herramienta que ellos recrean y que evoluciona frente a la necesidad de resolver problemas.

Para aprender, los alumnos necesitan "hacer matemáticas", es decir, precisan enfrentar numerosas situaciones que les presente un problema, un reto, y generar sus *propios recursos* para resolverlas, utilizando los conocimientos que ya poseen.

Sus recursos serán informales al principio, pero poco a poco, con la experiencia, la interacción con sus compañeros y la ayuda del maestro, evolucionarán hacia la formalización del conocimiento.

En consecuencia, los conocimientos matemáticos y los problemas no pueden separarse. No se trata de "aprender" matemáticas para después "aplicarlas" a la resolución de problemas, sino de aprender matemáticas *al resolver* problemas.

Esta concepción didáctica implica recuperar los significados de los conocimientos, contextualizarlos nuevamente, es decir, ponerlos en situaciones en las que éstos cobren sentido para el alumno, al permitirle resolver los problemas que se le plantean.

En este *Taller* se ofrecen experiencias para que usted, maestro, pueda ampliar, desde esta perspectiva, sus conocimientos sobre los contenidos matemáticos que se trabajan en la educación primaria, se exploran los problemas que dan sentido y muestran la utilidad de los conocimientos matemáticos. Asimismo, se analizan las condiciones didácticas que pueden favorecer su adquisición.

Al mismo tiempo, podrá experimentar una manera distinta —más grata, creativa e interesante— de hacer y aprender matemáticas.

Propósitos

La realización de este *Taller* le permitirá:

- Ampliar sus conocimientos sobre los contextos y las secuencias de situaciones problemáticas que dan significado a los contenidos de matemáticas que se trabajan en la escuela primaria.
- Ampliar sus conocimientos sobre el enfoque didáctico de los nuevos materiales para la enseñanza de las matemáticas.
- Conocer con mayor profundidad la estructura y los contenidos de los nuevos materiales para la enseñanza de las matemáticas.
- Experimentar una manera grata y creativa de hacer matemáticas.

Estructura y contenido

El paquete de materiales para el desarrollo de este *Taller* consta de:

- Cuaderno de trabajo: *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Primera parte* (incluye un Anexo de respuestas).
- Cuaderno de trabajo: *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Segunda parte* (incluye un Anexo de respuestas).
- *Lecturas.*
- Un paquete de *Material recortable.*

A lo largo de la primera y segunda parte del *Taller*, se hace referencia, además, a distintos materiales curriculares de la SEP, como los Libros de texto gratuito y los Libros para el maestro, entre otros.

En la primera parte del Taller se desarrollaron los siguientes capítulos: "La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria", "Los números naturales y el sistema decimal de numeración", "La suma y la resta", "La multiplicación y la división", "La geometría" y "La medición".

Segunda parte del Taller. Se compone de cuatro capítulos en los cuales se abordan los temas específicos de los programas de matemáticas de la primaria: "Las fracciones", "Procesos de cambio", "Tratamiento de la información" y "La predicción y el azar". Los dos primeros capítulos constan de varios temas que se desarrollan a lo largo de varias actividades.

Anexo de respuestas. Este apartado contiene las respuestas de algunos de los problemas que se plantean a lo largo del taller. Su función es permitirle controlar sus resultados.

Lecturas. Este libro contiene algunos artículos que se analizan a lo largo de la primera y segunda parte del *Taller*, sobre temas relevantes de la enseñanza o del aprendizaje de las matemáticas.

Material recortable. Algunas de las actividades que se plantean requieren de un material elaborado en cartoncillo. Para evitarle invertir tiempo extra en prepararlo, este material viene incluido y sólo es necesario recortarlo.

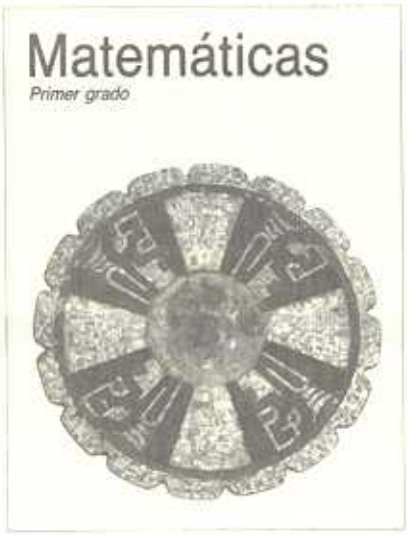
Materiales curriculares. En la primera y segunda parte del taller se analizan distintas secciones de la mayoría de los libros y materiales correspondientes al *Plan y programas de estudio 1993. Educación Básica. Primaria* que la SEP pone a su disposición para la enseñanza de las matemáticas. Estos son:

Materiales para maestros:

- *Plan y programas de estudio 1993. Educación Básica. Primaria. SEP.*
- *Avance programático. Primer grado.*
- *Avance programático. Segundo grado.*
- *Avance programático. Tercer grado.*
- *Avance programático. Cuarto grado.*
- *Avance programático. Quinto grado.*
- *Avance programático. Sexto grado.*
- *Libro para el maestro. Matemáticas. Primer grado.*
- *Libro para el maestro. Matemáticas. Segundo grado.*
- *Libro para el maestro. Matemáticas. Tercer grado.*
- *Libro para el maestro. Matemáticas. Cuarto grado.*
- *Libro para el maestro. Matemáticas. Quinto grado.*
- *Libro para el maestro. Matemáticas. Sexto grado.*
- *Fichero de actividades. Matemáticas. Primer grado.*
- *Fichero de actividades. Matemáticas. Tercer grado.*
- *Fichero de actividades. Matemáticas. Quinto grado.*

Materiales para los alumnos:

- Libro de texto. *Matemáticas. Primer grado.*
- *Matemáticas. Primer grado. Recortable.*



- Libro de texto. *Matemáticas. Segundo grado.*
- *Matemáticas. Segundo grado. Recortable.*
- Libro de texto. *Matemáticas. Tercer grado.*
- Libro de texto. *Matemáticas. Cuarto grado.*
- Libro de texto. *Matemáticas. Quinto grado.*
- Libro de texto. *Matemáticas. Sexto grado.*

En algunas actividades de esta segunda parte del *Taller*, se hace referencia a los siguientes materiales complementarios:

- *Juega y aprende matemáticas. Propuestas para divertirse y trabajar en el aula.* Libros del rincón SEP (distribuido en 1992).
- Audio: *Las fracciones. Matemáticas 5* de la serie El conocimiento en la escuela. Programa de actualización del maestro.

Las actividades que se hace referencia a estos últimos materiales son complementarias, de tal forma que si usted no dispone de ellos, puede omitirlas y continuar con la actividad siguiente.

Las actividades

Situaciones problemáticas. En todos los temas de cada capítulo se plantean distintos tipos de actividades. El tipo de actividad más frecuente son las llamadas "*situaciones problema*", diseñadas para maestros, cuyo propósito es permitirle conocer con mayor profundidad los distintos contenidos de matemáticas de los programas de la primaria, desde el punto de vista de sus contextos y sus significados. Al mismo tiempo, se espera que usted viva la experiencia de *hacer matemáticas*, es decir, de construir conocimientos matemáticos al resolver cierto tipo de problemas. Ésta es una de las principales características del enfoque para la enseñanza de las matemáticas en los nuevos materiales curriculares.

Es importante que aborde estas situaciones con el mismo ánimo que enfrenta un acertijo, una adivinanza o un juego: observará que nunca se trata de aplicar conocimientos matemáticos sofisticados, sino de buscar y construir estrategias para resolverlas, a partir de lo que usted ya sabe. Los ensayos, los errores, las rectificaciones son parte esencial del proceso de

construcción de conocimientos matemáticos y, si se realizan con libertad y confianza, se pueden volver experiencias muy gratas.

Algunas de las situaciones problemáticas que se plantean constituyen variaciones de actividades similares a las que los niños pueden realizar. Por ejemplo, para analizar el proceso de aprendizaje de la serie numérica oral, se propone la utilización momentánea de una serie ficticia. De esta manera, podrá *experimentar* algunas de las dificultades que enfrentan los niños, al mismo tiempo que analiza las características de la herramienta matemática en cuestión (la serie).

Mario Gómez Casas

Estas variaciones de las actividades que los niños pueden realizar ***no son propuestas para llevar al salón de clases.*** *Son situaciones diseñadas especialmente para maestros. Pueden, en cambio, aportar lineamientos para analizar las propuestas dirigidas a los niños, o incluso, para diseñarlas.*

Hay otras situaciones que, con ligeras modificaciones o incluso sin ellas, pueden ser útiles para el trabajo con los alumnos. En general, cuando éste es el caso, se indican los grados escolares en los que la actividad puede resultar interesante.

El análisis de procedimientos, respuestas y errores frecuentes de alumnos de primaria constituye otro tipo de actividad. Se trata de conocer algunos de los procedimientos que los niños pueden crear frente a determinados problemas, las dificultades conceptuales que enfrentan y los recursos que ayudan a propiciar la evolución de dichos procedimientos.

Entre las actividades de este tipo, hay algunas que se llaman "*Veamos lo que hacen los niños*", cuyo propósito es que usted explore, en su salón de clases, los procedimientos, dificultades, respuestas y errores de sus alumnos frente a cierto tipo de problemas.

Laura Cano Blanco

En el Capítulo II, Tema 1, Actividad 5, se proponen situaciones de este tipo para aplicarse en quinto y sexto grado.

Se le sugiere que aplique *una* de las situaciones propuestas. Recuerde que el propósito es *explorar*, es decir, observar y tratar de comprender lo que hacen los niños, por sí mismos, interactuando entre ellos frente a un determinado problema. Ocupe el lugar del observador, sin preocuparse por dirigir las resoluciones. Anime a los alumnos a que aborden el problema como ellos quieran, permita que se ayuden entre ellos. Procure registrar durante la clase o después, los distintos intentos de resolución de sus alumnos. Trate de que le expliquen lo que pensaron, para que usted pueda comprender mejor el proceso que siguieron. Al final, puede organizar al grupo para que varios alumnos o equipos expliquen a los demás lo que hicieron.
Su registro será un documento valioso que seguramente valdrá la pena compartir con sus colegas.

Nuestros materiales de trabajo. Estas actividades tienen el propósito de conocer y analizar los materiales para la enseñanza de las matemáticas que la SEP pone a su disposición. El análisis de las propuestas que se hacen en estos materiales, le permitirá tener una idea amplia del desarrollo de los distintos temas de matemáticas a lo largo de la primaria, y sacar un mayor provecho de los mismos.

¿Qué hemos aprendido en este capítulo? El propósito de estas actividades es permitirle repasar algunos de los aspectos tratados durante el capítulo. Cada capítulo, termina con esta pequeña actividad. En el *Anexo de respuestas* encontrará los resultados de algunos de los ejercicios planteados en estas actividades.

Curiosidades Matemáticas. A lo largo del *Taller*, se presentan en pequeños recuadros, al margen del texto, algunos

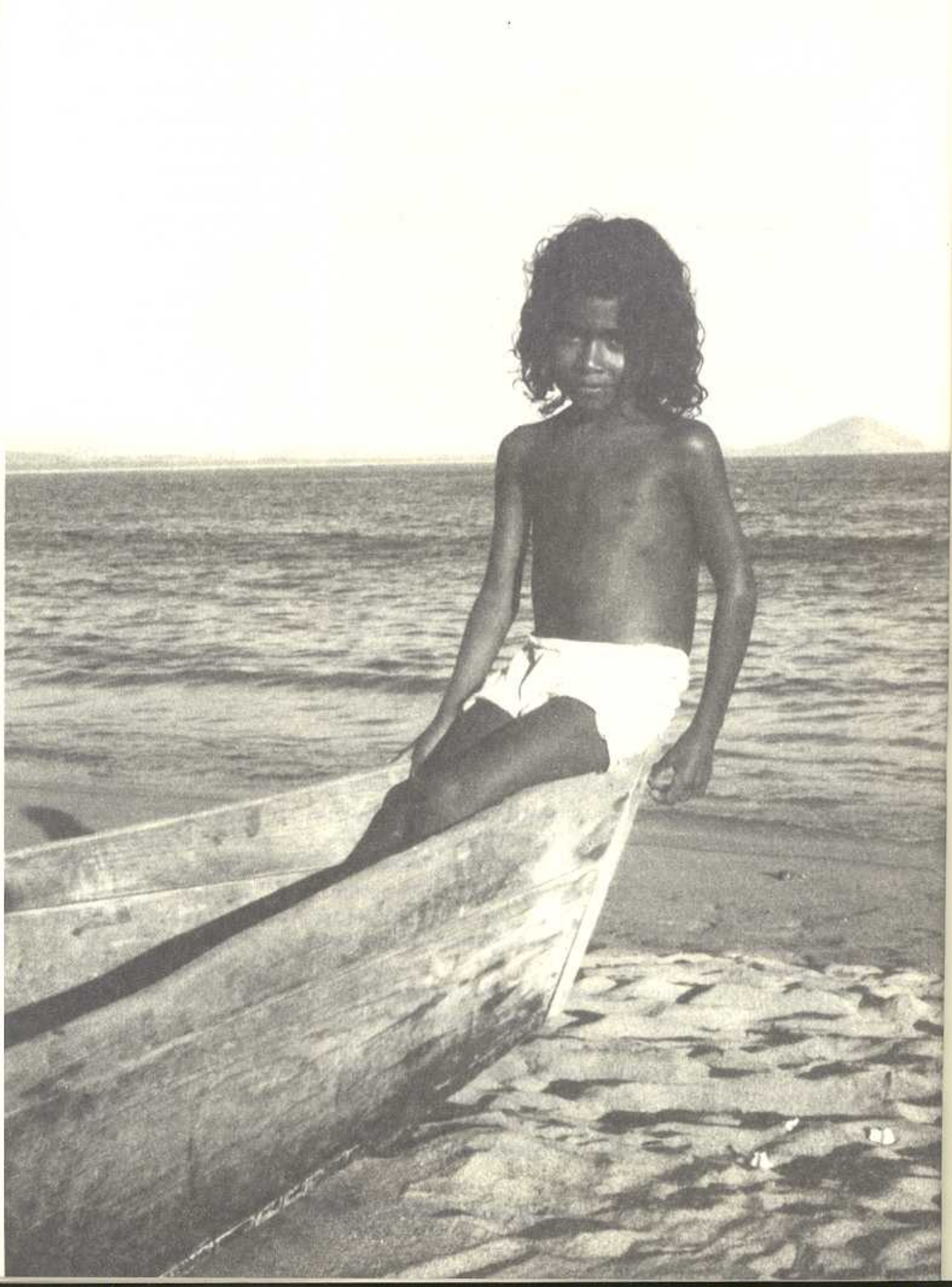
acertijos, pasatiempos y problemas interesantes cuyo propósito es que usted juegue y se divierta *haciendo matemáticas*. Estos problemas no guardan relación con el contenido que se está trabajando en cada capítulo.

Recomendaciones importantes

1. Para sacar un mayor provecho del *Taller* y, sobre todo, para disfrutar mucho más la experiencia de realizarlo, se le recomienda llevarlo a cabo al menos con un colega. Lo ideal es trabajar en equipos de tres a seis integrantes.

   En algunas actividades es indispensable la participación de por lo menos dos personas. Si usted trabaja solo, puede realizar esas actividades con sus familiares o amigos.

   A lo largo de las actividades tituladas *Nuestros materiales de trabajo* se revisan los libros de matemáticas de todos los grados escolares. Procure, con su equipo, reunirlos todos. Si no le es posible, puede limitarse a realizar las partes de los libros que logre conseguir; por lo menos, los que correspondan al grado que usted atiende.
2. En el cuaderno de trabajo del *Taller* se dan espacios para que usted anote las respuestas a la mayoría de las preguntas. Sin embargo, con frecuencia necesitará hacer apuntes, dibujos, esquemas o cuentas que no caben en esos espacios. Para ello, se recomienda tener un cuaderno dedicado al *Taller*, y señalar siempre el capítulo, tema y actividad a que corresponden las anotaciones que vaya haciendo. Este cuaderno formará parte integral de los materiales que constituyen el *Taller*.
3. En algunas actividades se le pide que redacte cierto tipo de problemas para alumnos de distintos grados escolares. Puede abrir una pequeña sección de problemas en su cuaderno, o crear un fichero, para tener a la mano estos problemas y poder utilizarlos.
4. Puede emplear la calculadora en las actividades en las cuales considere que le será útil.
5. Probablemente se encontrará con algún problema que le parezca difícil. Si después de varios intentos siente que no lo puede resolver, ¡no se detenga! Continúe con la actividad siguiente. Regrese al problema en otra ocasión, o coméntelo con algún colega e intenten resolverlo juntos. No es grave que algunas preguntas se queden sin respuesta; lo más importante es comprometerse con la experiencia de búsqueda.



I

Las fracciones

A diferencia de lo que sucede con otros contenidos de aritmética de los programas de la primaria, las fracciones se utilizan menos en la vida cotidiana y, en consecuencia, los niños tienen muy pocos conocimientos previos cuando inician este tema en la escuela.

Lo anterior, aunado a la tendencia de trabajar de inmediato con el lenguaje simbólico de las fracciones, tiene como consecuencia que los niños no logren apropiarse de los significados de esta noción.

Así, para muchos niños, las fracciones no son más que pares de números naturales sin relación entre sí, puestos uno arriba del otro, y como tal las manejan: consideran, por ejemplo, que una fracción que está formada con números más grandes que los de otra, es necesariamente la más grande; para sumarlas, suman sus numeradores y sus denominadores; cuando se trata de representarlas gráficamente, tienden a tener en cuenta únicamente el numerador o el denominador.

Por esta razón, el trabajo de contextualizar a las fracciones es uno de los retos importantes que se plantea a la enseñanza de esta noción: es necesario diseñar situaciones en las que las fracciones, sus relaciones y operaciones cobren sentido como herramientas útiles para resolver determinados problemas.

Por otra parte, la búsqueda de contextos lleva a descubrir que existen diversos tipos de situaciones y que, dependiendo de la situación, las fracciones adquieren distintos significados.

A través de diversas actividades, problemas y juegos, en este capítulo se analizan estas situaciones y significados, a la vez que se propician ciertas reflexiones sobre las condiciones didácticas para su aprendizaje.

Mario Gómez Casas

Tema 1
Las fracciones en el reparto

El reparto equitativo y exhaustivo (en partes iguales y sin que sobre nada), es una de las actividades fundamentales que llevan a fraccionar una o varias unidades.

Actividad 1

El reparto de pasteles

En esta actividad comprobará que existen distintas maneras de hacer un reparto y distintas maneras de expresar, con fracciones, cuánto le toca a cada quien.

Material:

☛ Hojas de papel tamaño carta (puede ser papel de desecho).

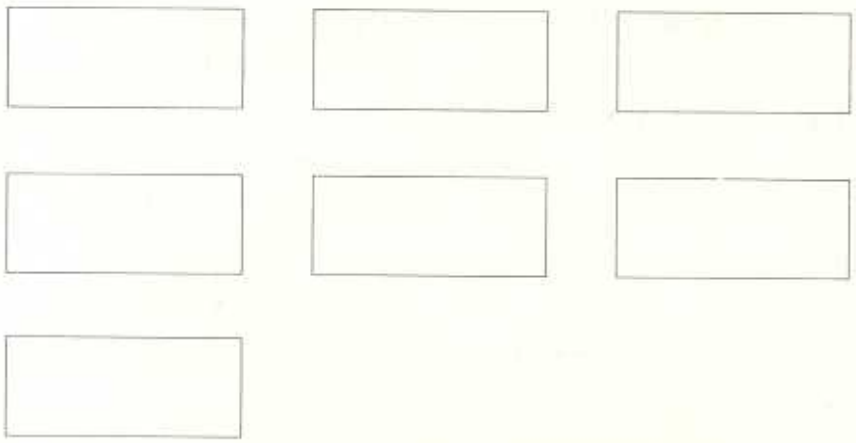
1. Lea el siguiente texto y conteste lo que se pregunta después:

Cinco niños se van a repartir siete pastelitos iguales. Quieren que a cada quien le toque lo mismo y que no sobre nada de pastel.

a) ¿Cree usted que a cada niño le toque más de un pastel, o menos de un pastel? _____

b) ¿Cuánto pastel le tocará a cada niño? _____

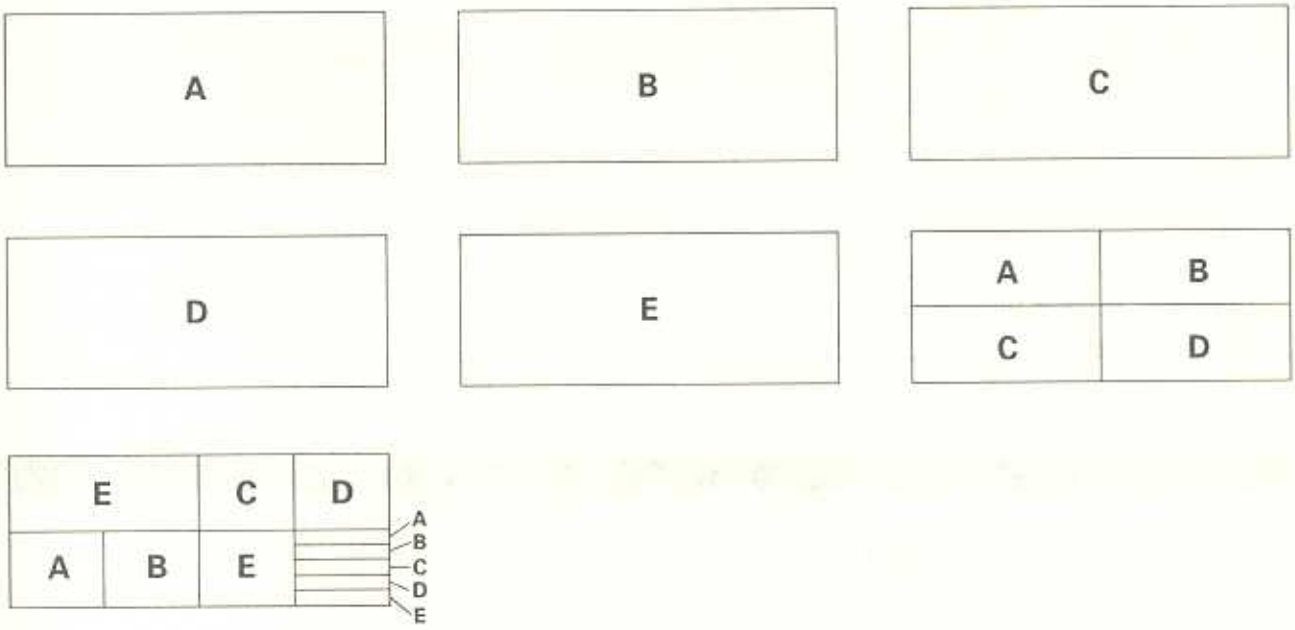
c) Abajo están dibujados los siete pasteles. Marque la parte que le tocaría a cada niño.



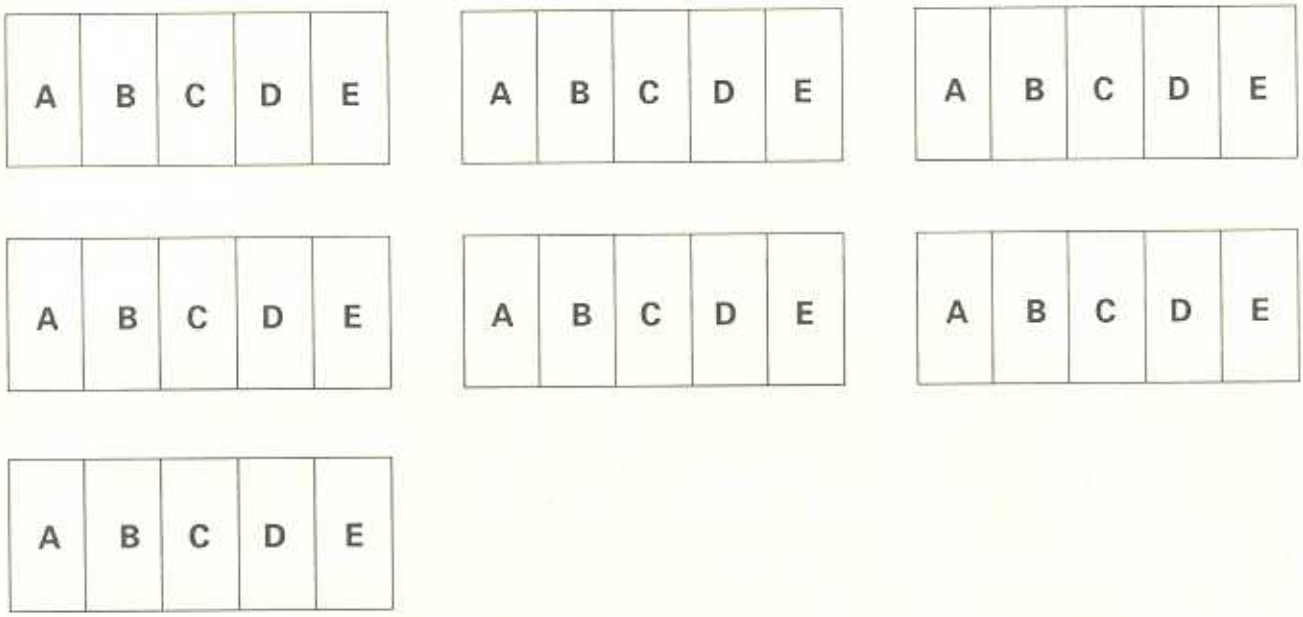
d) Verifique si el resultado que obtuvo, al hacer el reparto con dibujos, es el mismo que usted anotó como respuesta a la pregunta anterior.

2. A continuación se muestran dos formas de repartir 7 pasteles entre 5 niños. Los niños aparecen indicados con las letras **A, B, C, D, E**.

Forma 1



Forma 2



a) ¿Alguno de estos repartos es incorrecto?_____ ¿Por qué?

_____

_____

b) ¿En cuál de las dos formas de repartir le toca más pastel a cada niño?_____

c) Use sumas de fracciones para expresar la parte que le toca a cada niño con cada forma de reparto.

Forma 1: A cada niño le tocó:
1 pastel + $\frac{1}{4}$ de pastel + _____

Forma 2: A cada niño le tocó:
$\frac{1}{5}$ de pastel + _____

$\frac{1}{2}$ de un ladrillo más 6 libros pesan lo mismo que un ladrillo. ¿Cuánto pesa el ladrillo?

Actividad 2

¿A quién le tocó más?

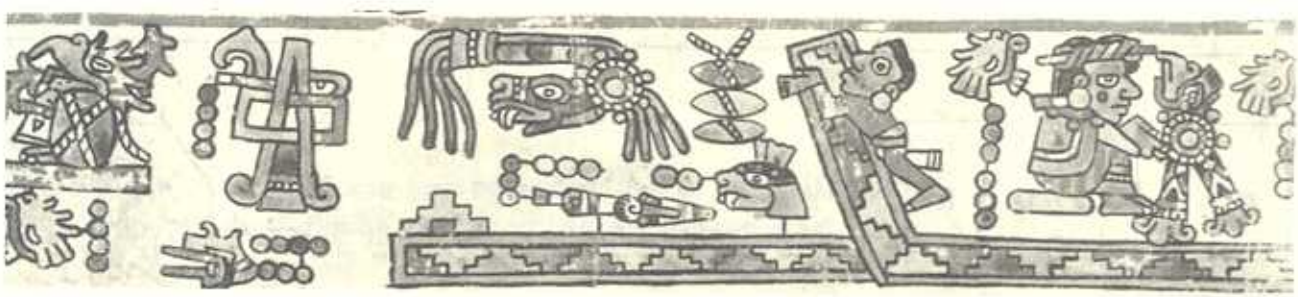
En esta actividad se establecen comparaciones entre las partes que resultan de distintos repartos, a partir de los datos "número de pasteles - número de niños".

1. Para encontrar los datos que se piden a continuación ***no es necesario hacer ninguna cuenta escrita***. Si lo necesita, haga dibujos.

En la siguiente tabla aparecen indicados varios repartos.

a) En la 3a columna, ponga una palomita a los repartos en los que a cada niño le toca ***más*** de un pastel.

b) En la 4a columna, ponga una palomita a los repartos en los que a cada niño le toca ***menos*** de un pastel.



c) En la 5a columna, ponga una cruz a los repartos en los que a cada niño le toca exactamente un pastel.

Reparto	N° de pasteles	N° de niños	Les toca más de un pastel	Les toca menos de un pastel	Les toca exactamente un pastel
1	2	3			
2	2	4			
3	3	2			
4	4	6			
5	2	5			
6	4	3			
7	6	9			
8	4	4			
9					
10					
11					

2. Observe los datos de la tabla anterior y determine a qué niños, de los repartos que se comparan a continuación, les tocará más pastel.

a) ¿A los niños del reparto 1 o a los del reparto 2? _____
¿Por qué? _____

b) ¿A los niños del reparto 1 o a los del reparto 6? _____
¿Por qué? _____

c) ¿A los niños del reparto 1 o a los del reparto 3? _____
¿Por qué? _____

d) ¿A los niños del reparto 1 o a los del reparto 4? _____
¿Por qué? _____

3. En la tabla hay dos repartos en los que, a cada niño, le toca lo mismo que a los niños del reparto 1. ¿Cuáles son esos repartos?

_____

4. En la 2a y 3a columna de la tabla, escriba los datos del reparto 9, de tal manera que a cada niño le toque más de un pastel.

5. En la 2a y 3a columna de la tabla, escriba los datos del reparto 10, de tal manera que a cada niño le toque exactamente un pastel.

6. En la 2a y 3a columna de la tabla, escriba los datos del reparto 11, de tal manera que a cada niño le toque lo mismo que a los niños del reparto 5.

7. En su cuaderno, redacte un texto en el que explique:

a) Cuándo, en un reparto, le toca a cada niño más de un pastel.

b) Cuándo le toca a cada niño exactamente un pastel.

c) Cómo hacer para obtener varios repartos en los que a cada niño le toque lo mismo de pastel que en el reparto 1.

Actividad 3

¿Cómo era la barrita entera?

En un reparto de "pasteles" hay varios datos: número y tamaño de los pasteles, número de niños entre los que se va a hacer el reparto, tamaño de la parte que le toca a cada niño. Variando el dato que se pregunta (incógnita) se obtienen interesantes problemas.

Material:

- Un cuarto de pliego de cartoncillo.

1. Resuelva el siguiente problema:

Cuatro niños se repartieron tres barritas iguales de chocolate. A cada uno le tocó lo mismo y no sobró nada.

La parte de chocolate que le tocó a cada niño es del tamaño de la que se muestra a continuación:

a) ¿Cree usted que el tamaño de cada barrita entera de chocolate, era más grande o más chica que la parte que le tocó a cada niño?_____ ¿Por qué?_____

_____

_____

b) Averigüe de qué tamaño eran las barritas de chocolate que se repartieron los niños y dibuje, en el espacio de abajo, una de las barritas enteras. Le puede ser útil copiar y recortar varias partes como las que le tocaron a cada niño.

c) Para verificar su respuesta anterior, construya tres tiras de cartoncillo del tamaño de la que dibujó y repártalas entre cuatro.

Compruebe si las partes que obtiene son del mismo tamaño que la mostrada en la página anterior. Si hubo error, inténtelo de nuevo.

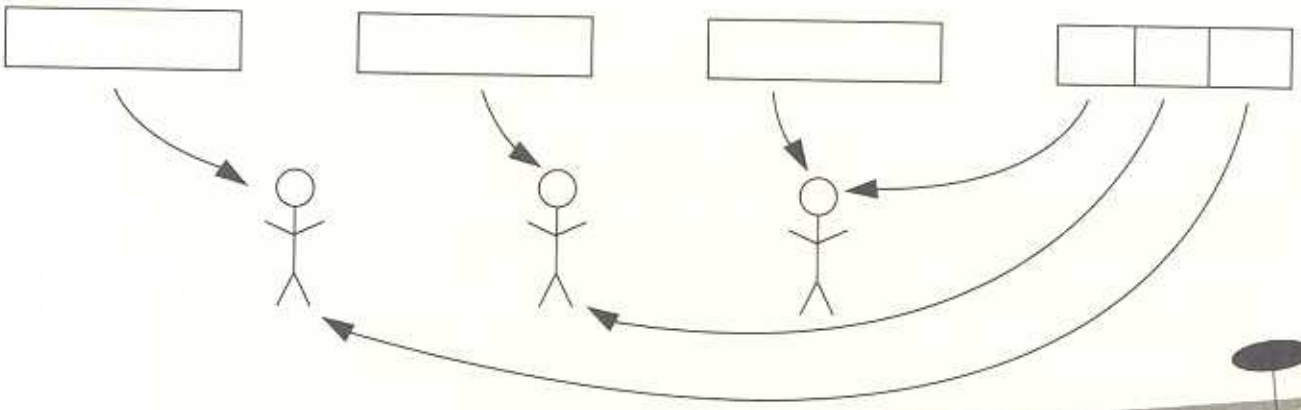
2. Resuelva el siguiente problema:

Tres niños se repartieron en partes iguales cuatro barritas de chocolate y no sobró nada. La parte que le tocó a cada niño es del tamaño que se muestra a continuación:

Averigüe de qué tamaño era cada barrita entera de chocolate, y dibuje en el espacio de abajo una barrita.

3. En la siguiente resolución del ejercicio anterior hay un error. Trate de encontrarlo.

"Se repartieron 4 barritas entre tres niños. Dibujé primero las barritas enteras, de cualquier tamaño, sólo para ayudarme a pensar, y las repartí.



Vi que a cada niño le tocan una barrita y $\frac{1}{3}$ de otra.

Entonces pensé: el pedazo que está dibujado tiene 1 barrita y $\frac{1}{3}$ de otra...

Descubrí que bastaba con quitarle ese tercio a la parte que le tocó a un niño:"

Pilar le dió a Inés la mitad de sus galletas y media galleta más. Le quedaron 7 galletas. ¿Cuántas galletas recibió Inés?

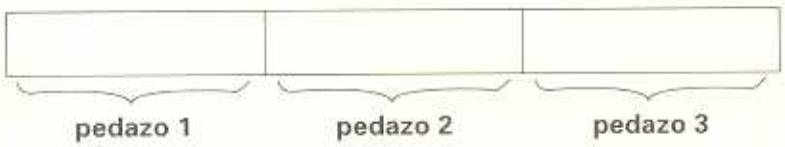
¿Cuál fue el error?_____

_____

_____

4. A continuación se da el inicio de otra resolución al mismo problema. Intente terminarla.

"Yo pensé: como el reparto fue cuatro chocolates entre tres niños, tiene que haber tres porciones iguales. Entonces, junté las tres porciones:



Y pensé, ahí está todo el chocolate que se repartieron. Entonces..."

En los problemas anteriores se conocían tres de los datos del reparto:

- *el número de niños entre los que se hizo el reparto,*
- *el número de chocolates que se repartieron, y*
- *el tamaño del pedazo que le tocó a cada niño.*

Al tratar de averiguar el cuarto dato (el tamaño de cada uno de los chocolates que se repartieron), es necesario considerar que la unión de las partes que se reparten forman el todo repartido.

5. Resuelva el siguiente problema:

Unos niños se repartieron varias barritas de chocolate. A cada uno le tocó lo mismo y no sobró nada. Las barritas y la porción que le tocó a cada niño, son como las que se dibujan a continuación.

Barrita entera

Porción que le tocó a cada niño

a) ¿Cree usted que había más niños que barritas? ____
¿Por qué? _____

b) Dibuje y recorte varias barritas enteras y varias porciones como las del dibujo, para averiguar cuántos niños eran y cuántas barritas se repartieron. Escriba aquí su resultado:

_____

_____

c) Explique cómo encontró su respuesta.

_____

_____

_____

d) Para este problema existe más de una respuesta correcta. Trate de encontrar por lo menos tres respuestas más.

_____

_____

6. A continuación se da el inicio de una resolución a este problema. Si es distinta a la que usted hizo, trate de terminarla:

"Yo pensé que si se juntan todas las porciones se debe obtener el total que fue repartido. Entonces puse varias barritas, una detrás de otra y abajo hice lo mismo con varias porciones, viendo cuándo coincidían las barritas con las porciones..."

entero	entero	entero
porción	porción	

En el problema anterior sólo se conocen 2 datos:

- *El tamaño de la porción que le toca a cada niño, y*
- *el tamaño de los chocolates que se repartieron.*

Para averiguar entre cuántos niños se hizo el reparto y cuántos chocolates se repartieron, se puede considerar nuevamente que el total de chocolates repartidos debe coincidir con el total de porciones.

7. Varios niños se repartieron algunas barritas de chocolate. A cada uno le tocaron $\frac{7}{4}$ de barrita.

a) ¿Cuántas barritas se repartieron? _____

b) ¿Cuántos niños eran? _____

Este problema es similar al anterior, pero esta vez la información se da a nivel numérico. Es necesario ver cuántas porciones de $\frac{7}{4}$ forman enteros.

8. Un último problema:

Cinco niños se repartieron tres galletas redondas, en partes iguales y sin que sobrara nada.

Utilizando únicamente la galleta que aparece dibujada abajo, es decir, sin dibujar las otras cuatro galletas, trate de representar la parte que le toca a un niño.

Los problemas de reparto son más interesantes si desde el principio se ven casos en los que el "todo" que se reparte está formado a veces por un solo elemento y a veces por varios elementos. Por ejemplo, 3 pasteles, 5 barritas.

También es conveniente que desde el principio a cada niño le toque a veces más de un entero (por ejemplo 3 pasteles entre 2 niños) y a veces menos (por ejemplo, 2 pasteles y 4 niños).

Actividad 4

Nuestros materiales de trabajo

En esta actividad se analizan algunas lecciones de los libros de texto de matemáticas, sobre el reparto.

1. Revise, en el L. T. M. 3°, las situaciones de reparto que aparecen en las siguientes lecciones: "Un paseo al zoológico", "El gato", "En la tienda del zoológico", "Quesos y crema" y "Compartir con los amigos", págs. 50, 64, 66, 86 y 134, respectivamente.

Describa en las líneas de abajo las características de cada problema y aquello que lo distingue del anterior, como en el ejemplo.

Material:

☛ Libros de texto. Matemáticas (L. T. M.) 3°, 4° y 6° grado.

"Un paseo en el zoológico": En las situaciones que implican fraccionar, se reparte un solo entero entre cuatro. El resultado de los repartos es siempre un cuarto.

"El gato":

"En la tienda del zoológico":

"Quesos y crema":

"Compartir con los amigos":

2. Revise, en el L. T. M. 4°, las situaciones de reparto de las lecciones que se indican en la tabla. Complétela, escribiendo en cada casillero "***sí***" o "***no***" según si el aspecto que se señala se trabaja o no en la lección.

	Suma de fracciones	Resta de fracciones	Comparación de fracciones	Equivalencia de fracciones
"Tarjetas de papel", pág. 65.				
"Galletas redondas", pág. 82.				
"Más galletas y más niños", pág. 94.				

3. En la lección "Las recetas de la tía", pág. 56 del L.T.M. 6°, hay una situación en la que se comparan los resultados de dos repartos.

¿Qué diferencia hay, en cuanto al nivel de dificultad, entre esta situación y las que se plantean en el libro de 4° grado?

_____

_____

En la misma página 56 del libro de sexto, hay una situación de reparto diferente a todas las que se han resuelto anteriormente. ¿En qué radica esa diferencia?

_____

_____

Consulte el siguiente cuadro para revisar sus respuestas a las preguntas anteriores.

Situaciones de reparto			
Grado	**Descripción**	**Páginas**	**Lección**
3er. grado	Se reparte un solo entero entre varios niños.	50 – 51	"Un paseo en el zoológico"
	Se reparten varios enteros entre varios niños. El resultado es menor que 1.	65	"El gato"
	Se reparten tres enteros entre 2 niños. El resultado es mayor que 1.	67	"En la tienda del zoológico"
	Se reparte un solo entero. Aparecen escrituras numéricas	87	"Quesos y crema"
	Se reparten varios enteros entre varios niños. Un resultado es menor que 1 y otro mayor. Hay escritura numérica.	135	"Compartir con los amigos"
4° grado	Repartos entre 2, entre 4 y entre 8. Resultados menores y mayores que 1.	65	"Tarjetas de papel"
	Comparación entre resultados de repartos.	82-83	"Galletas redondas"
	Equivalencia entre resultados de repartos.	94-95	"Más galletas y más niños"
6° grado	Comparación a partir de dos repartos. Numeradores y denominadores distintos: $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{5}$. Cálculo de la cantidad de niños.	56	"Las recetas de la tía"

Actividad 5

¿Qué piensan los niños de primero y segundo acerca de algunos resultados de repartos de "pastel"?

Material:
- *Lecturas.*

1. Lea el artículo "El reparto y las fracciones" (*Lecturas*, págs. 159 a 175) y escriba un breve texto con su punto de vista sobre los siguientes aspectos:

- Es una verdad matemática indiscutible que $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{4}$ ó $1\frac{1}{2}$ son fracciones que valen lo mismo.

¿Qué opinan sobre esto los niños de 1° y 2°?

¿Por qué para ellos este dato sí es discutible?

¿Tiene algún valor didáctico la discusión entre los niños?

¿Mostrándoles esas fracciones de "pastel" dibujadas en el pizarrón, se podría corregir su error? ¿Por qué?

Las situaciones de reparto equitativo y exhaustivo de unidades que se pueden partir (superficies, longitudes) constituyen una fuente de interesantes problemas para trabajar con las fracciones: dan lugar a realizar y comparar distintas particiones, a cuantificar las partes en relación a una unidad, a considerar la igualdad entre el todo y la unión de las partes; asimismo, permiten obtener expresiones distintas pero equivalentes para cuantificar el resultado de un reparto (por ejemplo, $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$), así como comparar repartos entre sí a partir de sus datos (por ejemplo, 2 pasteles y 4 niños es equivalente a 4 pasteles y 8 niños).

Como ya se ha visto, pueden plantearse desde problemas adecuados para alumnos de tercer grado que se inician en el tema, hasta problemas más complejos para sexto grado.

En este tema, las fracciones nos han permitido cuantificar o ***medir*** *la parte que resulta de un reparto. En el tema siguiente se abordarán situaciones más generales de medición que dan lugar al uso de las fracciones. Más adelante, en el tema 5 "Las fracciones como resultado de una división", volveremos al contexto de reparto, esta vez para conocer otro significado de las fracciones.*

b) ¿La **I** o la **K**?_____ ¿Por qué? _____

_____

c) ¿La **I** o la **L**?_____ ¿Por qué? _____

_____

d) ¿La **I** o la **N**?_____ ¿Por qué? _____

_____

3. Ponga una paloma a los razonamientos que le parezcan correctos y un tache a los incorrectos.

a) La tira **I** es más larga que la **J** porque en **I** son cuartos y en **J** son tercios, y cuatro es más grande que tres.

b) La tira **J** es más larga que la **I** porque las dos se forman con 5 pedacitos, pero los cuartos son más chicos que los tercios.

c) La tira **L** es más grande que la **I**, porque 6 y 5 son números más grandes que 5 y 4.

d) La tira **N** es menor que la tira **I**, porque $\frac{35}{50}$ es menor que la unidad y $\frac{5}{4}$ es mayor que la unidad.

Muchas veces se puede saber cuál de dos fracciones es mayor, sin tener que obtener fracciones equivalentes o tener que usar la regla de los productos cruzados.

Por ejemplo: $\frac{5}{4}$ es mayor que $\frac{6}{5}$ porque $\frac{5}{4}$ es un entero más $\frac{1}{4}$, $\frac{6}{5}$ es un entero más $\frac{1}{5}$, y $\frac{1}{4}$ es mayor que $\frac{1}{5}$.

e) Escriba al menos otras dos parejas de fracciones en las que se pueda saber, a simple vista, cuál fracción de cada pareja es mayor.

____ y ____ ____ y ____.

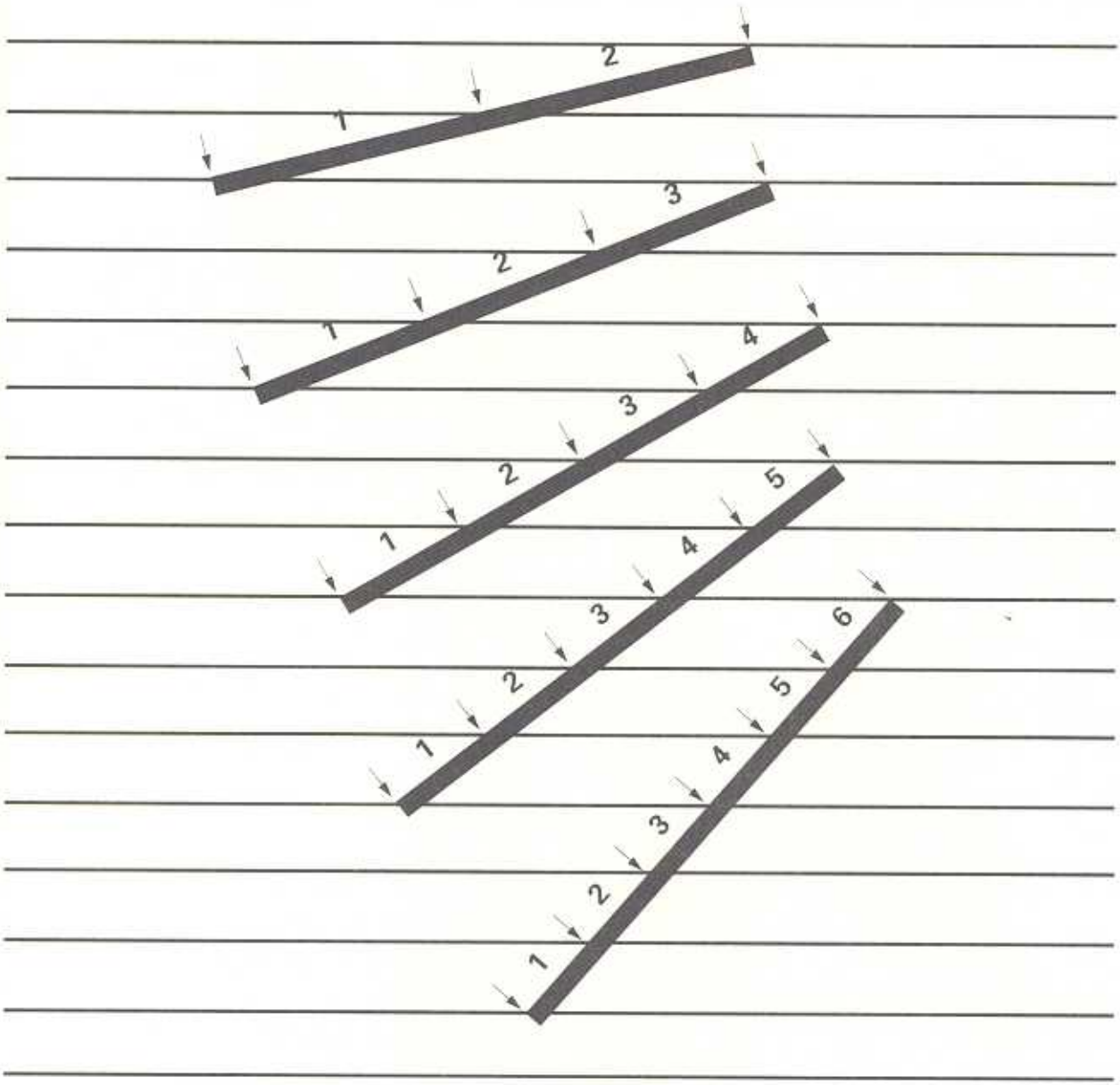
Explique cómo se puede saber qué fracción es mayor.

_____

_____

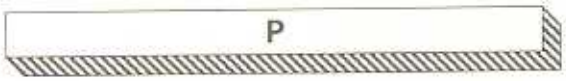
El ejercicio de comparar fracciones y después argumentar la respuesta o verificar con material, es muy útil para aclarar el significado de las fracciones como partes de unidades, para evidenciar errores y para poder hacer estimaciones y controlar mejor los resultados que se obtienen al hacer cuentas.

4. Observe cómo se puede dividir una longitud en partes iguales, utilizando las rectas paralelas de una hoja rayada:



- Utilice las tiras Unidad y el procedimiento de las rectas paralelas para fabricar las tiras **I**, **J**, **K**, **L**. Compruebe después, comparando las tiras, si contestó bien las preguntas del punto 2.

5. La tira **P** que aparece dibujada abajo mide $\frac{7}{5}$ de una tira **Q**. ¿La tira **Q**, es más grande o más chica que la tira **P**?



Dibuje la tira **Q**.

Actividad 2

Un juego de medición con fracciones

El propósito de esta actividad es analizar el valor didáctico de un sencillo juego de medición en el que se usan las fracciones.

1. Lea el juego "¿Quién se acercó más?" del libro *Juega y aprende matemáticas*.

2. Prepare el material para realizar la cuarta versión del juego.

3. Realice esa versión del juego con, al menos, otra persona.

María Gómez Casas

4. Escriba en su cuaderno su opinión sobre este juego. Puede considerar los siguientes puntos:

- ¿Para los alumnos de qué grados puede ser adecuado?
- ¿Qué pueden aprender los alumnos al jugarlo?
- ¿Qué modificaciones considera pertinente hacerle?

Material:

☛ Libro *Juega y aprende matemáticas. Propuestas para divertirse y trabajar en el aula*. Libros del rincón (SEP).

En las actividades iniciales de medición de longitudes, es conveniente usar como unidad de medida una tira, de cualquier tamaño, para propiciar el uso de fracciones de unidad. Si se utilizara el metro o el decímetro, los alumnos tenderían normalmente a expresar sus mediciones en centímetros y milímetros, evitando así el uso de fracciones.

Actividad 3

Las fracciones en la recta

La recta numérica constituye una representación muy útil de los números para estudiar algunas de sus propiedades, especialmente las que tienen que ver con el orden. El propósito de las siguientes actividades es ayudarlo a reflexionar sobre algunas características de esta representación.

1. Marque, sobre el borde de una hoja, un segmento Unidad igual al que se muestra y señale el punto **M**.

- Utilice el procedimiento de las rectas paralelas para indicar qué fracción corresponde al punto M.

2. Marque sobre las rectas los números que se indican:

a)

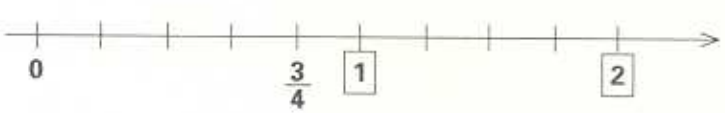
b)

c)

- A continuación se dan algunas respuestas erróneas a los ejercicios anteriores. Intente explicar los errores.

2. a)

Error: _____

2. c) 

Error: _____

3. En el ejercicio 2. b), la fracción $\frac{1}{2}$ se puede poner en cualquier lugar. Intente explicar por qué:

_____

_____

La representación de las fracciones en la recta numérica es muy útil para comparar, sumar y restar fracciones, así como para apoyar razonamientos como los que realizó usted en el ejercicio anterior. Puede introducirse desde tercer grado, elaborando tiras de cartoncillo divididas en medios, cuartos y octavos, y utilizándolas para medir diversos objetos. En el juego "¿Quién se acercó más?" se propone otra interesante actividad con estas tiras.

Actividad 4

¿Puede ser $\frac{1}{4}$ mayor que $\frac{1}{2}$?

En esta actividad se propicia la reflexión sobre la unidad a la que se refiere una fracción.

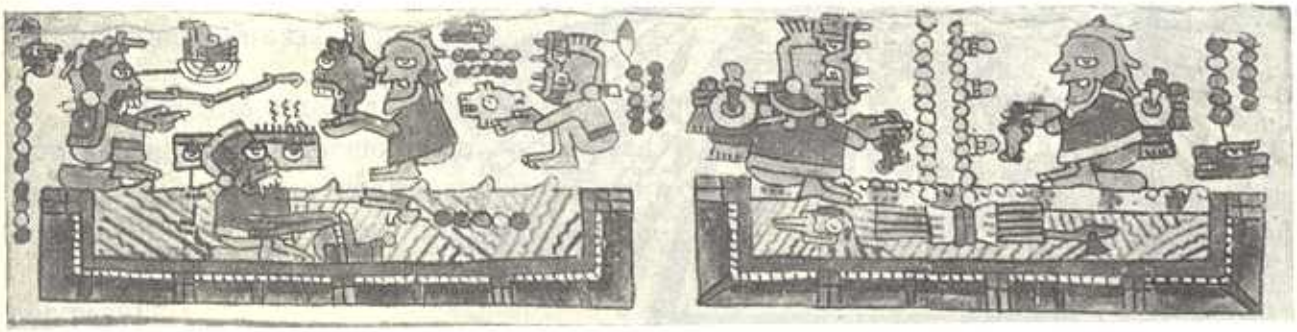
1. ¿Puede ser $\frac{1}{4}$ mayor que $\frac{1}{2}$? _____

- Señale en cada uno de los rectángulos de abajo la fracción de superficie que se indica:

A	B
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

¿Qué fracción de superficie es mayor? _____ ¿A qué se debe?

_____



Cuando se manejan fracciones sin hacer explícita una unidad, por ejemplo "$\frac{1}{2}$" en vez de "$\frac{1}{2}$ de manzana", se considera una unidad común de referencia (no concreta), exactamente igual que cuando se escriben números naturales sin especificar una unidad: 2, 5, 7, etcétera. Por lo tanto, $\frac{1}{4}$ no es más grande que $\frac{1}{2}$ pero $\frac{1}{4}$ de un terreno sí puede ser más grande que $\frac{1}{2}$ de otro terreno. Durante el trabajo inicial con las fracciones en contextos de medición es conveniente referirse siempre a unidades específicas (tiras, superficies, "pasteles", colecciones, etcétera).

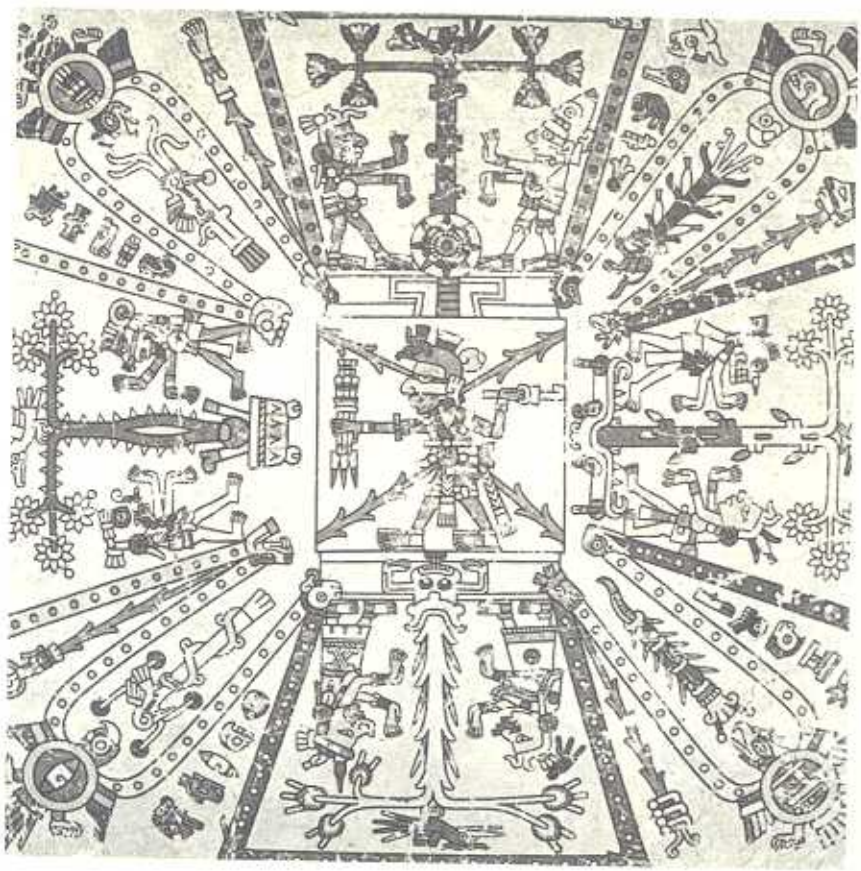
2. Cuatro niños compraron una cajita con 3 barritas de chocolate y se las repartieron en partes iguales. No les sobró nada.

a) ¿Qué parte de barrita le tocó a cada uno?

_____

b) ¿Qué parte del contenido de la cajita le tocó a cada uno?

_____



c) ¿Cuál es la unidad de medida en la pregunta (a)?

_____

d) ¿Cuál es la unidad de medida en la pregunta (b)?

_____

En el problema anterior, ***todo el contenido*** está formado por 3 barritas de chocolate.

- Si se toma como unidad de medida ese ***todo***, (las tres barritas, es decir, todo el contenido de la cajita) a cada niño le toca: $\frac{1}{4}$ del contenido de la cajita o $\frac{1}{4}$ de las tres barritas.
- Si se toma como unidad de medida una barrita, a cada niño le tocan $\frac{3}{4}$ de barrita.
  ¡Claro!... ¡Es lo mismo $\frac{3}{4}$ de ***una*** barrita que $\frac{1}{4}$ de ***tres*** barritas!

A	A	A	B
B	B	C	C
C	D	D	D

Le toca $\frac{3}{4}$ de barrita

A	B	C	D

Le toca $\frac{1}{4}$ de todo

3. Indique, en cada caso, cuál es la unidad de medida a la que se refiere la fracción.

a) Me tardé medio día en llegar. _____

b) Deme $\frac{1}{4}$ de kg de jamón. _____

c) Se me echaron a perder las $\frac{2}{3}$ partes de la carne que compré. _____

d) Son cuarto para las ocho. _____

4. Regrese a la actividad 2 del tema 1. Anote a la derecha del cuadro qué fracción de ***todo*** lo que se repartió le toca a cada niño. Anote después qué fracción de ***pastel*** le toca a cada niño. Por ejemplo, en el reparto 1, a cada niño le toca $\frac{1}{3}$ de ***todo*** lo que se repartió, pero le tocan $\frac{2}{3}$ de un pastel.

Después de agotar el tema sobre los números racionales, el maestro indica a sus alumnos que al día siguiente entrará con los irracionales.
Al día siguiente el maestro no se explica la ausencia de sus racionales alumnos.

Actividad 5

Partes de partes

Los problemas en los que se aplica una fracción a otra fracción ayudan a profundizar en el significado de la fracción como partes de unidades.

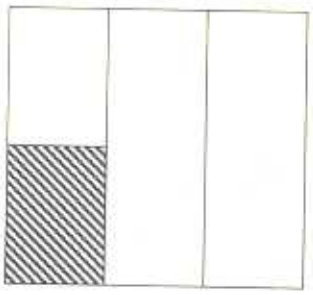
1. Resuelva el siguiente problema:

La tercera parte de un terreno se dedicó a la siembra. De esta parte, en la mitad se sembró maíz.

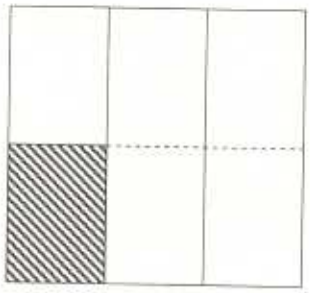
¿Qué parte ***del terreno*** se dedicó a la siembra del maíz? _____

_____

2. Observe la siguiente resolución gráfica al problema anterior y verifique si su respuesta fue correcta.



Parte dedicada a la siembra del maíz.



La parte dedicada al maíz es $\frac{1}{6}$. Para saberlo, se dividió el terreno en partes iguales.

3. Resuelva los siguientes problemas. Procure utilizar dibujos para resolverlos.

a) Un alambre que mide $\frac{2}{3}$ de metro, se parte a la mitad. ¿Qué fracción de metro mide cada parte? _____

_____

b) Se usó un cuarto de un pliego de cartoncillo para hacer una bandera. La tercera parte de ese cuarto, se pintó de rojo. ¿Qué fracción del pliego de cartoncillo se pintó de rojo?

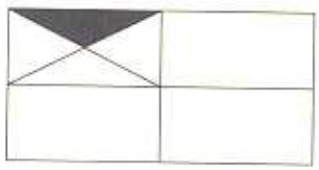
_____

c) El jardín de una casa ocupa $\frac{3}{5}$ del terreno. En $\frac{2}{3}$ del jardín hay pasto. ¿Qué fracción del terreno tiene pasto? _____

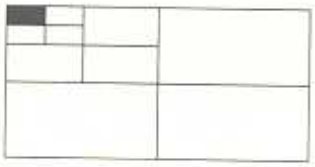
d) La mitad de una pared se cubrió con mosaicos, unos lisos y otros con dibujo. Los mosaicos con dibujo abarcan $\frac{1}{6}$ de la pared. ¿Qué fracción del total de los mosaicos tienen dibujo?

_____

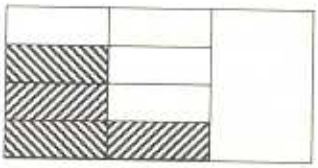
4. ¿Qué fracción de cada una de las siguientes superficies está sombreada?



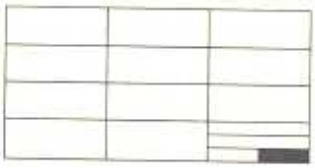
_____



_____



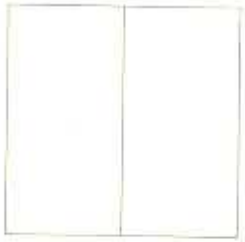
_____



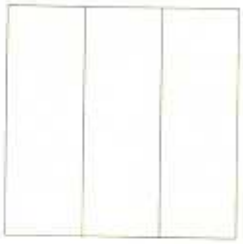
_____

Un maestro hizo esta pregunta en clase: "Si tomo un avión y voy al norte, luego al sur, después al este y luego al oeste, ¿cuántos años tengo?"
-Usted tiene 44 años- replicó un muchacho.
-Exactamente- dijo sorprendido el maestro, -pero ¿cómo lo supiste?
-Muy fácil- contestó el alumno. -Tengo un hermano que tiene 22 años y está medio loco-.

5. Sombree las fracciones de superficie que se indican, utilizando las subdivisiones de las figuras.



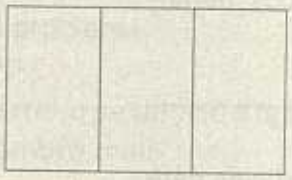
$\frac{1}{6}$ de la superficie



$\frac{4}{15}$ de la superficie

$\frac{5}{12}$ de la superficie

Los ejercicios en los que se pide que se marque una fracción de la superficie de una figura suelen ser poco interesantes porque, generalmente, la figura ya está dividida en el número de partes que indica el denominador, y solamente es necesario fijarse en el numerador.



"Colorea $\frac{1}{3}$ de la figura"

Ejercicios como el que acaba de realizar hacen necesario fijarse tanto en el numerador como en el denominador.

Actividad 6

Hacia la equivalencia de fracciones

En las actividades que hasta aquí se han realizado, se ha podido observar fracciones distintas que representan una misma cantidad, es decir, fracciones equivalentes. En esta actividad se desarrolla un procedimiento para obtener fracciones equivalentes.

1. Obtenga cinco fracciones, multiplicando por distintos números el denominador de la fracción $\frac{2}{3}$. Por ejemplo, multiplicando por 5, se obtiene $\frac{2}{15}$.

¿Las fracciones que obtuvo son mayores, menores o iguales que $\frac{2}{3}$? _____

- Ordene las fracciones que obtuvo de menor a mayor y escriba abajo de cada una el factor que usó para obtenerlas.

_____

Observe que entre más grande es el número por el que se multiplica el denominador, más chica es la fracción que se obtiene.

- Al multiplicar el denominador de $\frac{2}{3}$ por 5, se obtuvo $\frac{2}{15}$. Represente ambas fracciones en la recta:

¿Cuántas veces cabe $\frac{2}{15}$ en $\frac{2}{3}$? _____

¿Por cuánto hay que multiplicar el numerador de $\frac{2}{15}$ para obtener una fracción que valga lo mismo que $\frac{2}{3}$? _____

- Multiplique el numerador de las cinco fracciones que obtuvo al principio para obtener fracciones que valgan lo mismo que $\frac{2}{3}$.
- Trate de concluir tomando en cuenta los siguientes puntos:

a) ¿Qué le sucede a una fracción si se multiplica únicamente su denominador por un número mayor que uno?

_____

b) ¿Qué le sucede a una fracción si se multiplica únicamente su numerador por un número mayor que uno?

_____

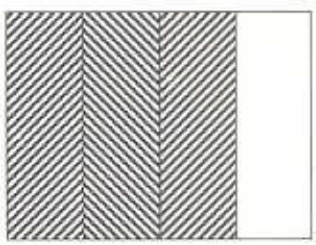
c) ¿Qué le sucede a una fracción si se multiplican tanto su numerador como su denominador por el mismo número?

_____

d) ¿Qué le sucede a una fracción si se multiplica su numerador por un número y su denominador por otro número más grande?

_____

2. La superficie de abajo se subdividió en 4 partes con líneas verticales.



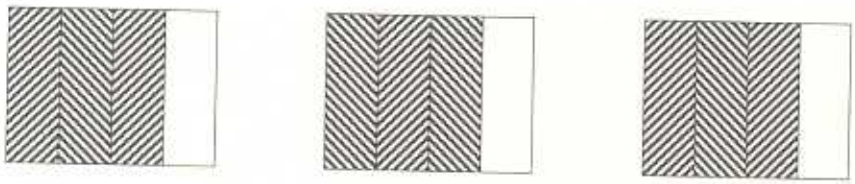
a) Subdivida la misma superficie en el número de partes que usted desee, con líneas horizontales.

¿En cuántas partes quedó dividida la superficie? _____

¿Cuántas de esas partes están sombreadas? _____

¿Qué fracción, distinta a $\frac{3}{4}$, se puede usar para indicar la parte que está sombreada? _____

b) Utilice las superficies de abajo para obtener otras particiones, trazando líneas horizontales. Escriba, en cada caso, la fracción equivalente a $\frac{3}{4}$ que se obtiene.



_____ _____ _____

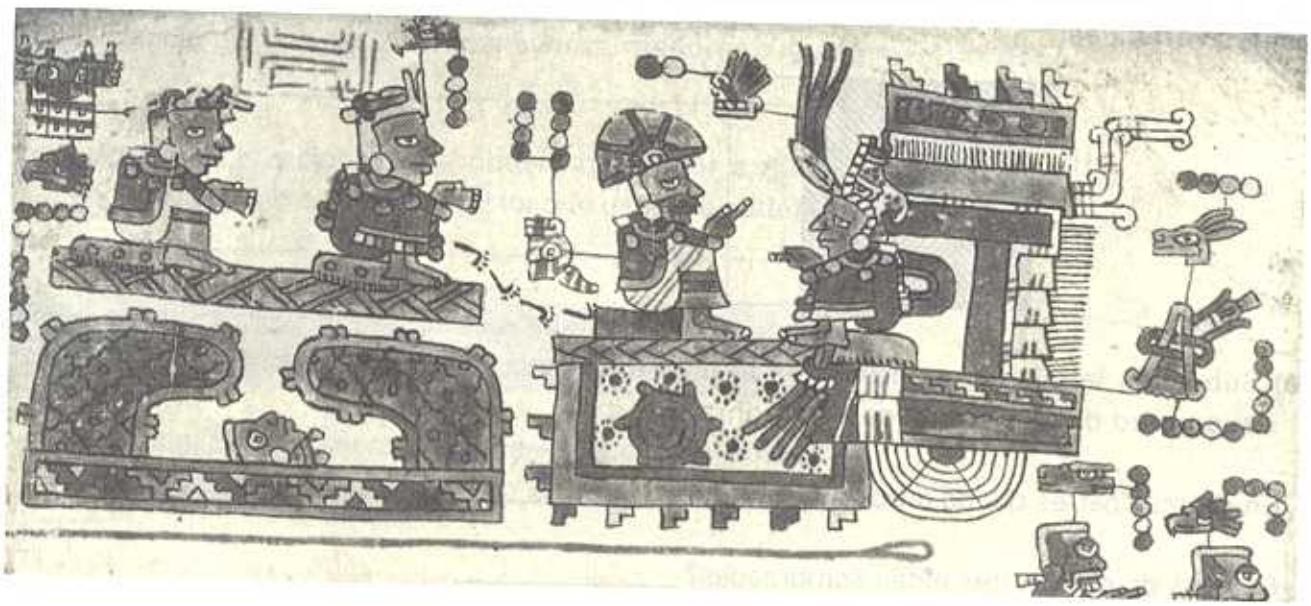
- Con este procedimiento ha obtenido usted varias fracciones equivalentes a $\frac{3}{4}$. Realice otra partición para obtener una fracción equivalente a $\frac{3}{4}$, cuyo denominador sea 24.

- Con este procedimiento, ¿podría obtenerse una partición en 27 partes? _____ ¿En 28 partes? _____ ¿En 10 partes? _____

- Trate de decir cómo son los números que corresponden a las particiones que sí se pueden obtener: _____

_____

Para explicar las fracciones comunes el maestro llevó un cuchillo y una manzana. Al ir partiendo la manzana en partes iguales, los alumnos iban contestando el nombre de las partes formadas: mitades, cuartos, octavos, dieciseisavos. Finalmente les dice a sus alumnos: "Si parto la manzana en 32 partes, ¿qué tendré ahora?"
Los alumnos respondieron: "¡Picadillo! maestro".



Actividad 7

La suma y la resta de fracciones

El contexto de medición es muy apropiado para proponer situaciones que implican sumar o restar fracciones. En esta actividad se analizan algunas de esas situaciones.

1. Resuelva mentalmente los siguientes problemas.

Juan Francisco Ríos

Don Luis tiene tramos de tubo con las siguientes medidas:

a) $\frac{13}{10}$ de m

b) $\frac{1}{4}$ de m

c) $\frac{3}{4}$ de m

d) $\frac{2}{3}$ de m

e) $\frac{1}{5}$ de m

f) $\frac{2}{5}$ de m

g) $\frac{3}{7}$ de m

h) $\frac{5}{6}$ de m

i) $\frac{5}{4}$ de m

j) $\frac{9}{8}$ de m

k) $\frac{1}{10}$ de m

l) $\frac{3}{8}$ de m

m) $\frac{3}{10}$ de m

n) $\frac{1}{3}$ de m

o) $\frac{1}{2}$ de m

Necesita varios tubos que sean más largos que medio metro pero más chicos que un metro.

¿Qué tramos de tubo puede usar?_____

_____

_____

¿Cómo supo, sin hacer cuentas escritas, qué tramos miden entre $\frac{1}{2}$ metro y 1 metro?

_____

_____

_____

Ubicar mentalmente fracciones en los rangos "menor que $\frac{1}{2}$", "entre $\frac{1}{2}$ y uno", "mayor que uno", favorece el análisis de ciertas relaciones entre el numerador y el denominador de una fracción y el tamaño de la fracción. Por ejemplo, puede descubrirse que para que una fracción sea mayor que $\frac{1}{2}$, es necesario que su numerador sea más de la mitad del denominador.

Cuando se realizan actividades como ésta con los alumnos, es conveniente que verifiquen después sus estimaciones, haciendo dibujos o trazando líneas con el apoyo de alguna unidad de medida (por ejemplo, con tiras de un metro previamente subdivididas).

2. Don Luis ya usó los tramos que miden entre $\frac{1}{2}$ m y 1 m, pero necesita tres más. Decidió unir pares de tramos. ¿Qué pares puede unir para obtener tres tubos entre $\frac{1}{2}$ m y 1 m? Resuelva el problema mentalmente, sin hacer cuentas escritas.

____ + ____ ____ + ____ ____ + ____

3. Ahora don Luis necesita tramos que midan exactamente 1 m. Decidió recortar los que son más grandes que 1 metro.

¿Qué tubos va a recortar?_____

¿Qué fracción de metro debe quitar a cada tubo?_____

_____

*Hay numerosas situaciones que implican sumar o restar fracciones y que pueden resolverse **sin** necesidad de conocer las técnicas usuales para hacer esas operaciones. Al realizar estas actividades y verificar las respuestas con dibujos o mediciones reales, se propicia que los alumnos comprendan cuándo y para qué se pueden sumar o restar fracciones y, al mismo tiempo, afirman su conocimiento de las fracciones en contextos de medición.*

Un ranchero quiere repartir a sus tres hijos 17 caballos, con la única condición de que sean repartidos de la siguiente forma y sin sacrificar algún animal.
Al mayor, $\frac{1}{2}$ de los caballos.
Al siguiente $\frac{1}{3}$ de los caballos.
Al menor $\frac{1}{9}$ de los caballos.
¿Cómo lograron repartirlos? ¿Cuántos caballos les tocaron a cada uno?

Actividad 8

Los procedimientos para sumar y restar fracciones

En esta actividad se analizan procedimientos para sumar fracciones.

1. En la escuela primaria se suele enseñar a sumar y restar fracciones aplicando una regla de "productos cruzados":

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{(2 \times 4) + (3 \times 3)}{(3 \times 4)} = \frac{8 + 9}{12} = \frac{17}{12}$$

Los alumnos deben memorizar esta regla, como tantas otras, sin comprenderla, sin saber tampoco para qué es necesario sumar y restar fracciones.

A partir de los conocimientos básicos sobre fracciones que se han visto hasta aquí, procure usted explicar dicha regla, el por qué de sus distintos pasos. Escriba la explicación en su cuaderno.

2. Explique por qué, cuando se suman fracciones con el mismo denominador, únicamente se suman los numeradores.

Juan Francisco Ríos

3. Escriba en su cuaderno un ejemplo en el que salte a la vista que si se suman los numeradores y los denominadores de dos fracciones (error que cometen los alumnos con mucha frecuencia), el resultado que se obtiene no es factible.

- Proponga una forma de poner en evidencia el error.

_____

_____

4. Para sumar las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$, se pueden buscar fracciones equivalentes a $\frac{2}{3}$ y a $\frac{3}{4}$ que tengan el mismo denominador:

- Escriba 10 fracciones equivalentes a $\frac{2}{3}$. Obténgalas multiplicando el numerador y el denominador por 2, por 3, por 4, hasta por 10:

$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9},$ _____

- Obtenga ahora, de la misma manera, 10 fracciones equivalentes a $\frac{3}{4}$.

_____

- Busque dos fracciones, una equivalente a $\frac{2}{3}$ y otra a $\frac{3}{4}$, tengan el mismo denominador. Estas fracciones ya se pueden sumar.

- Observe que en la regla de los "productos cruzados" están "sintetizados" los pasos que se siguieron en el procedimiento anterior para sumar dos fracciones. Por ejemplo, en ambos procedimientos el numerador y el denominador de la fracción $\frac{2}{3}$ se multiplican por 4.

El procedimiento para sumar fracciones que acaba de usar implica comprender que dos fracciones se pueden sustituir por otras dos que representan la misma cantidad.

Comprender esto implica razonar a nivel del lenguaje simbólico. Por ello, es conveniente que los niños trabajen con este procedimiento hasta quinto o sexto grados. Antes, pueden sumar o restar fracciones con igual denominador pueden usar escrituras aditivas como $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$, sin reducirlas a una sola fracción, o pueden resolver sumas y restas muy sencillas (de medios, cuartos, por ejemplo) con apoyo de dibujos o de medidas reales.

Cada varón de una familia tiene igual número de hermanos que de hermanas; pero para cada niña de esa familia, el número de hermanas es la mitad del número de hermanos. ¿Cuántos niños y cuántas niñas hay en esa familia?

Actividad 9

Gana el que llega al 5

En esta actividad realizará un juego que requiere sumar fracciones y que, además, le permitirá construir una estrategia para ganar.

Material:

☛ Libro *Juega y aprende matemáticas. Propuestas para divertirse y trabajar en el aula.* Libros del rincón (SEP).

1. En el libro *Juega y aprende matemáticas,* busque el juego "Carrera a 20"[1]. Lea las reglas de las diferentes versiones que se proponen. Después juegue con un compañero la siguiente versión:

- El primer jugador escribe la fracción $\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{4}$.
- El segundo jugador suma, a la fracción anterior, $\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{4}$.
- Por turnos, continúan sumando $\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{4}$ a la fracción anterior.
- Gana el primero que llegue a 5.

Ejemplo:

Jugador A	Jugador B	
$\frac{1}{2}$		El jugador **A** empezó con $\frac{1}{2}$
	$\frac{3}{4}$	El jugador **B** sumó $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$
1		El jugador **A** sumó $\frac{1}{4}$
	$1\frac{1}{4}$	El jugador **B** sumó $\frac{1}{4}$
$1\frac{3}{4}$		El jugador **A** sumó $\frac{1}{2}$
	$2\frac{1}{4}$	El jugador **B** sumó $\frac{1}{2}$
$2\frac{3}{4}$		El jugador **A** sumó $\frac{1}{2}$
	3	El jugador **B** sumó $\frac{1}{4}$
$3\frac{1}{2}$		El jugador **A** sumó $\frac{1}{2}$
	4	El jugador **B** sumó $\frac{1}{2}$
$4\frac{1}{4}$		El jugador **A** sumó $\frac{1}{4}$
	$4\frac{1}{2}$	El jugador **B** sumó $\frac{1}{4}$
5		El jugador **A** sumó $\frac{1}{2}$ y ¡ganó!

1 Adaptación del juego "Carrera a 20" del libro *Juega y aprende matemáticas. Propuestas para divertirse y trabajar en el aula,* Libros del rincón SEP, 1991.

Actividad 10

Del cero al uno

En esta actividad realizará un juego en el que se comparan y se suman fracciones. El material con el que se juega está diseñado para permitir a los alumnos identificar y corregir sus errores.

1. Busque el juego "Del cero al uno" en el libro *Juega y aprende matemáticas* y lea las cuatro versiones que se presentan.

2. Utilice el material recortable N° 8 y juegue la cuarta versión con algún compañero.

3. Escriba en su cuaderno su opinión sobre el juego. Considere en qué puede ayudar a los niños.

Material:

- Recortable N° 8.

Mario Gómez Casas

Actividad 11

Multiplicando por un número entero

Con esta actividad se inicia la reflexión sobre la multiplicación de fracciones.

1. Resuelva los siguientes problemas:

a) Para hacer un librero se necesitan 6 tablas de $\frac{3}{4}$ de metro de largo y dos tablas de $1\frac{1}{2}$ metros de largo. En la madería venden tablas de 2 metros de largo. ¿Cuántas tablas habrá que comprar? _____

b) Un lado **a** de una figura mide $\frac{3}{4}$ de centímetro. Si se hace una copia cuyos lados sean cinco veces los de la original, ¿cuánto medirá el lado **a** de la copia?

_____

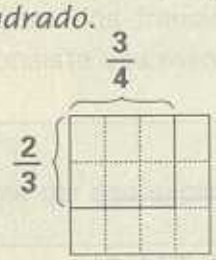
c) Un terreno rectangular ocupa $\frac{3}{4}$ de un lado de una manzana y $\frac{2}{3}$ de otro lado. ¿Qué fracción de la manzana ocupa el terreno? Represente su respuesta con un dibujo.

Ana tiene el doble del dinero que Pedro. Cada uno le da a Andrés $500 que es menos de la mitad de lo que tiene cada uno de ellos. ¿Continúa teniendo Ana el doble de Pedro?

Como ya se vió en la Primera parte del Taller, en el tema 1 del capítulo "La multiplicación y la división", se pueden distinguir dos tipos de problemas de multiplicación:

- *Problemas en los que se multiplican dos medidas.*
- *Problemas en los que se establece una relación proporcional entre dos medidas.*

Un ejemplo de problemas en los que se multiplican dos medidas es el cálculo de áreas. Si las medidas están expresadas con fracciones, este cálculo del área implica una multiplicación de fracciones. Por ejemplo, si las dimensiones de un rectángulo son $\frac{2}{3}$ de metro y $\frac{3}{4}$ de metro, el área es $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ de metro cuadrado.



$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$ ó $\frac{1}{2}$ de metro cuadrado

En los problemas en los que se establece una relación proporcional entre dos medidas, cada uno de los factores de la multiplicación juega un papel distinto. Por ejemplo, el problema b) se resuelve con la multiplicación $5 \times \frac{3}{4}$.

El $\frac{3}{4}$ representa una medida. Es el multiplicando. El 5 indica el número de veces que se considera esa medida. La

multiplicación que se obtiene es bastante sencilla, debido a que se puede interpretrar como una suma repetida:

5 veces $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$

En cambio, cuando el multiplicador es una fracción, se obtiene un problema que encierra nuevas dificultades. Por ejemplo: El lado de una figura mide 5 cm. Si se hace una copia cuyos lados sean $\frac{3}{4}$ *los de la figura original, ¿cuánto medirá ese lado?*

En el tema 4, "Las fracciones como operadores multiplicativos", analizaremos este tipo de problemas.

Actividad 12

Nuestros materiales de trabajo

En esta actividad se analizan algunas lecciones de los libros de texto de matemáticas, en las que se plantean situaciones sobre las fracciones en contextos de medición.

Material:

- Libros de texto. Matemáticas. (L. T. M.) 3°, 4°, 5° y 6° grado.

1. En la página 21 del L. T. M. 3°, hay una situación que se puede aprovechar para que los niños expresen sus ideas acerca de lo que es una mitad. Resuelva esa situación y después conteste la siguiente pregunta:

¿Cuál de las siguientes condiciones es necesaria para que las dos partes en que se divide una superficie sean mitades de la superficie?

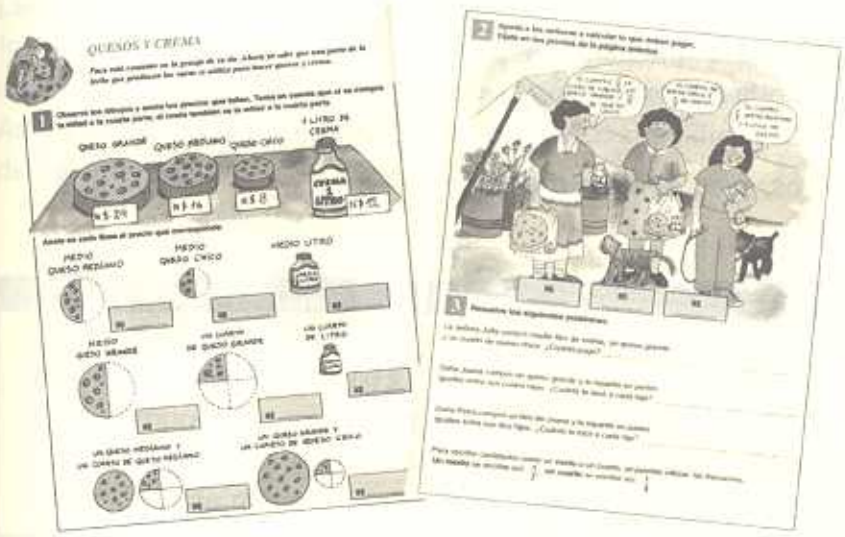
Que tengan la misma forma.
Que sean simétricas.
Que tengan la misma área.

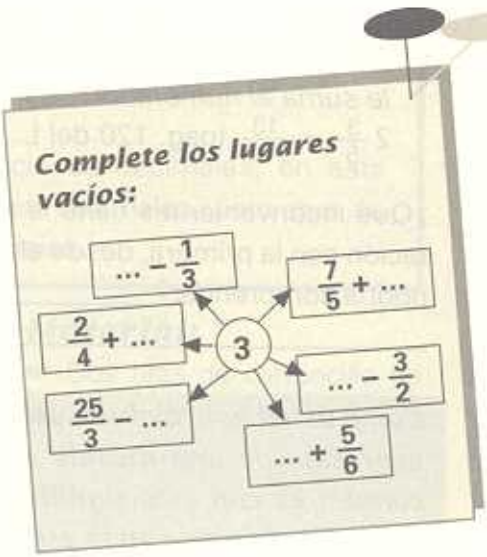
¿Por qué?_____

2. En la lección "Juguetes de madera", pág. 131 del L.T.M. 3° aparecen dos maneras de definir a la fracción $\frac{1}{2}$. En la primera, $\frac{1}{2}$ es la parte que resulta de partir el entero en dos partes iguales y tomar una. ¿Cuál es la segunda manera de definir a la fracción $\frac{1}{2}$?_____

3. En la lección "Quesos y crema", pág. 86 del L. T. M. 3°, la magnitud a la que se refieren las fracciones es a veces continua

(superficie, peso, capacidad, etcétera) y a veces discreta (por ejemplo, una cantidad de personas, de sillas, de dinero).





Dé un ejemplo de cada tipo de magnitud: _____

_____

4. En la lección "La paloma de la paz", pág. 118, del L. T. M. 4°, se trabaja con el contenido de equivalencia de fracciones. ¿En qué consiste ese trabajo?

_____

_____

5. En la página 125 del L. T. M. 5°, aparece otra manera de abordar la equivalencia entre dos fracciones, en este caso, entre $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2}$ ¿En qué consiste esa manera?

_____

¿Por qué no es conveniente dar esa explicación a los niños en los grados anteriores? _____

_____

6. Localice en las lecciones "Competencia deportiva", "Experiencias con fracciones", y "Vasos, semillas y tiras", págs. 41, 72 y 93, respectivamente del L. T. M. 5°, las situaciones en las que se trabaja la suma de fracciones. Haga un breve análisis de estas lecciones, considerando las siguientes preguntas:

¿El nivel de dificultad aumenta de una situación a otra?

¿Las lecciones son factibles de ser llevadas a cabo?

7. A continuación se presentan dos explicaciones para averiguar a cuántos quintos equivale la fracción $2\frac{3}{5}$:

a) *"En dos enteros hay diez quintos; diez quintos más tres quintos es igual a trece quintos"*.

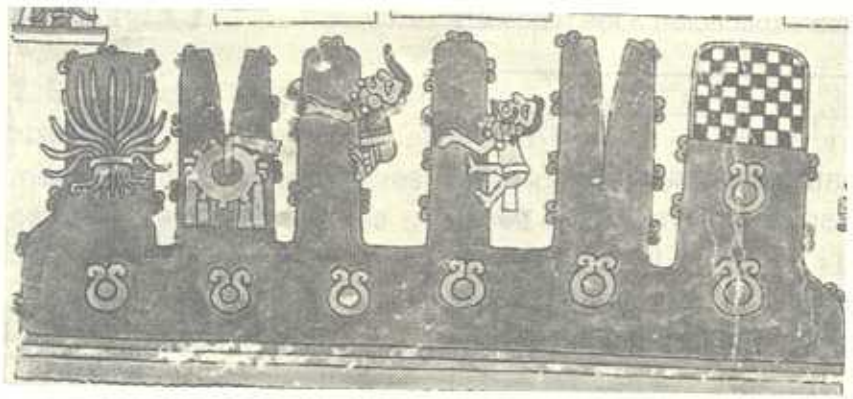
b) *"Se multiplica el entero por el denominador y al resultado se le suma el numerador"*: 2 x 5 = 10; 10 + 3 = 13; entonces, $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$ (pág. 120 del L. T. M. 6°).

¿Qué inconvenientes tiene la segunda explicación en comparación con la primera, desde el punto de vista de lo que un niño podría comprender?_____

_____

Como usted habrá observado, el uso de las fracciones como expresión de una medida o de una cantidad es bastante común: es con este significado que se suele introducir la noción de fracción en la escuela primaria, y es quizá el que más se emplea en la vida cotidiana.

Sencillos problemas de medición dan lugar a usar las fracciones, compararlas, sumarlas, restarlas y multiplicarlas por un número entero. En el tema siguiente seguiremos trabajando sobre este significado (la fracción como partes de unidades en contextos de medición), pero esta vez trabajaremos con el subconjunto formado por las fracciones decimales.



Tema 3
Las fracciones decimales y la medición

Las fracciones decimales constituyen un subconjunto de las fracciones. Presentan la gran ventaja de poder ser representadas con la notación de nuestro sistema decimal de numeración. Además, la operatoria con estas fracciones se simplifica considerablemente.

Actividad 1

Fracciones binarias

Para comprender mejor algunas características de las fracciones decimales, en esta actividad trabajará con un conjunto de fracciones que **no** son decimales, pero que se construyen de manera similar y se rigen por los mismos principios.

Material:

☛ Dos tiras de cartoncillo de 30 cm de largo.

1. Realice lo siguiente:

- Parta una de las tiras de 30 cm a la mitad.
- Parta una de las mitades, a la mitad.
- Continúe partiendo ***una de las dos mitades*** que obtiene a la mitad hasta que tenga una tira pequeña que sea $\frac{1}{32}$ de la tira original.
- Anote, en cada tira, su medida como fracción de la tira original: 1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, etcétera.
- Mida, con la mayor precisión posible, la longitud de dos objetos con su juego de tiras.
- Registre sus resultados en el siguiente cuadro. El primer renglón es un ejemplo.

	Tiras enteras	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
Largo de mi cuaderno	1	0	1	1	0	0

2. A continuación se da la medida del largo de un pizarrón:

	Tiras enteras	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
Largo del pizarrón	7	0	3	1	4	2

La tira de $\frac{1}{4}$ se repitió 3 veces. Se podría haber usado una tira de $\frac{1}{2}$ y una de $\frac{1}{4}$.

Vuelva a escribir la medida del largo del pizarrón, pero sustituya, cada vez que se pueda, dos o más tiras del mismo tamaño por tiras de mayor tamaño. Cuando termine, verifique que ya no se puedan hacer más sustituciones.

	Tiras enteras	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
Largo del pizarrón						

Observe que dos tiras de $\frac{1}{32}$ equivalen a una tira de $\frac{1}{16}$, dos tiras de $\frac{1}{16}$ equivalen a una tira de $\frac{1}{8}$ y así sucesivamente. Es decir, siempre se pueden sustituir dos tiras del mismo tamaño por una tira de mayor tamaño. Por lo tanto, para registrar las distintas medidas en el cuadro, sólo se necesitan el cero y el uno, excepto para el número de tiras enteras.

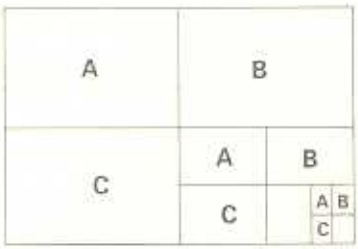
El juego de tiras $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, no permite dar siempre medidas totalmente exactas. Puede faltar o sobrar un pedacito, más pequeño que la tira de $\frac{1}{32}$. Sin embargo imagínese que fuera posible seguir partiendo tiras a la mitad, para obtener $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{128}$, etcétera.

Podría obtener tiras tan chicas como usted quisiera, y podría, por lo tanto, aproximarse tanto como quisiera a la medida real.

3. Realice las sustituciones necesarias en el cuadro del ejercicio 1, para que únicamente queden ceros y unos, excepto para el número de tiras enteras.

4. Problema para pensar: ¿Se puede expresar $\frac{1}{3}$ con las fracciones que se obtienen al partir en mitades ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$)?

Para reflexionar sobre este problema puede imaginar que se va a repartir un pastel entre tres niños, **A**, **B**, **C**; pero sólo se pueden hacer cortes en mitades, mitades de mitades, etcétera. ¿Llegará un momento en el que se reparta todo el pastel?



$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots$$

5. Para facilitar la escritura de las medidas, tomaremos un acuerdo:

Tiras enteras	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
5	0	1	0	0	1

5*01001

Separemos las tiras enteras de las tiras fraccionarias con un asterisco. En el primer lugar, a la derecha del asterisco, pondremos la cantidad de tiras $\frac{1}{2}$. En segundo lugar la cantidad de tiras $\frac{1}{4}$, y así sucesivamente. Llamaremos a esta escritura, "escritura con asterisco".

- Reescriba las medidas de los objetos del ejercicio 1 utilizando la escritura con asterisco:

Largo del cuaderno: 1*01100

6. Utilice su juego de tiras para medir y dibuje, en el siguiente espacio, una línea que mida 0*0101 tiras.

7. Una línea **A** mide 0*0111 tiras y una línea **B** mide 0*1 tiras.

¿Cuál cree que sea más larga? _____

- Dibuje las líneas en el espacio siguiente y compruebe su respuesta.

8. Una línea **C** mide 0*10 tiras y una línea **D** mide 0*11 tiras.

¿Cree que exista una medida mayor que la de **C**, pero menor que la de **D**? Si lo cree, escriba esa medida: _____

- Dibuje las líneas **C** y **D** y una línea **E** que mida 0*101 tiras.

- Compruebe que la línea **E** cumple con la condición anterior. ¿Fue la que usted propuso?

9. Hace un año una higuera medía 0*101 tiras unidad. Ahora ya mide 0*11 tiras unidad. ¿Cuánto creció en el año?

_____

10. Un listón que mide 25 tiras unidad se divide en tres partes iguales. ¿Cuánto mide cada parte? _____

Entonces, 25 ÷ 3 = 8*_____

- El problema anterior se puede resolver con el procedimiento que sigue. Si es distinto al que usted usó, continúe hasta obtener cuatro cifras después del asterisco.

```
   8*01...
3 ⟌25
  -24
    1
   2/2  La unidad se transforma en medios. Toca cero medios
   4/4  Los medios se transforman en cuartos
 - 3/4  Cuatro cuartos entre 3, toca a 1/4
   1/4  y sobra 1/4.
```

11. Seguramente usted ya observó que este sistema de fracciones tiene un parecido con las fracciones decimales.
Escriba aquí en qué se parecen y en qué son diferentes:

_____

_____

_____

La actividad con fracciones binarias que acaba de realizar tiene el propósito de ayudar a un adulto, que ya conoce las fracciones decimales, a reflexionar sobre las características de éstas. No es una actividad para alumnos de primaria, pero puede aportar lineamientos para trabajar con los alumnos.

En esta actividad, usted usó el sistema binario de fracciones para expresar los resultados de sus mediciones. Logró establecer comparaciones entre fracciones binarias, pudo verificar algunas de sus respuestas y corregir sus errores al realizar mediciones.

De manera similar, a los alumnos de primaria se les facilita mucho la comprensión de las fracciones decimales y de su escritura al realizar actividades de medición.

Actividad 2

Nuestros materiales de trabajo

En esta actividad analizará algunas lecciones sobre las fracciones decimales en los libros de texto de matemáticas.

Material:

- Libros de texto. Matemáticas. (L. T. M.) 4°, 5° y 6° grado.

1. En el L. T. M. 4°, pág. 102, resuelva la lección "Adornos para el festival". Después conteste las siguientes preguntas:

¿Qué dificultades encontró al resolver la lección? _____

_____

_____

¿Cuál es la unidad a la que se refieren las fracciones decimales en esta lección? _____

_____

- Escriba dos números que sean mayores que $\frac{2}{10}$ y menores que $\frac{7}{10}$. _____

2. Resuelva la lección "Animales que saltan", en el L.T. M. 4°, pág. 134 y después conteste las siguientes preguntas:

¿Qué dificultades encontró al resolver la lección? _____

_____

¿Qué dificultades piensa que pueden encontrar los niños?

_____

_____

Con actividades como la que se plantea en esta lección, los niños pueden apoyarse en la recta numérica para realizar descomposiciones aditivas como $\frac{136}{100} = 1\frac{3}{10} + \frac{6}{100}$. *Saber hacer estas descomposiciones les permitirá comprender mejor la escritura decimal de las fracciones.*

3. Localice en el L. T. M. 4°, la lección en la que se continúa el estudio de los decimales y anote aquí su nombre:

_____

¿Qué aspectos relacionados con los decimales se trabajan en esta lección? _____

_____

- En la página 140 de esta lección hay un error en uno de los dibujos.

¿A qué dibujo nos referimos? _____

¿En qué consiste el error? _____

4. Resuelva los pasatiempos que hay en la página 131 del L. T. M. 5°. Después conteste la siguiente pregunta:

¿Qué habilidades pueden desarrollar los niños al resolver este tipo de situaciones? _____

_____

5. En la página 158 del L. T. M. 6°, hay dos problemas interesantes que propician la reflexión sobre el significado de los decimales: escribir las siguientes cantidades de manera que indiquen lo mismo, pero sin usar el punto decimal.

29.5 millones de viajes. _____

2.4 millones de autos. _____

El problema radica, en primer lugar, en saber el significado de las cifras 5 y 4 contenidas en los números 29.5 y 2.4

Aproximadamente, ¿cuál es el total de vehículos (sin incluir al metro ni al tren ligero) que circulaba en la Ciudad de México? _____

En 1991, la población total del país era aproximadamente de 83 millones de habitantes. ¿Cuántos de ellos vivían en la Ciudad de México? _____

Escribe las siguientes cantidades sin utilizar punto decimal:
29.5 millones de viajes _____

2.4 millones de autos _____
Compara y comenta tus respuestas con tus compañeros.

En 1991 estaba vigente el Programa de Verificación Obligatoria de Vehículos Automotores, que consistía en revisar que éstos no contaminaran más allá de los límites permitidos. Según cifras oficiales, en ese año, las emisiones vehiculares representaron el 76% del total de contaminantes emitidos a la atmósfera en la Ciudad de México.

Además estaba en marcha el Programa Hoy No Circula, que disminuía el 20% del total de vehículos en circulación por día. De acuerdo con la última cifra de la placa del vehículo, se determinaba el día que descansaba cada uno.

Recuerda que 20% se puede expresar como $\frac{20}{100}$

Escribe dos fracciones equivalentes que representan el 20% $\frac{\square}{\square}$ $\frac{\square}{\square}$

En promedio, ¿cuántos vehículos no circulaban por día en la Ciudad de México con el Programa Hoy No Circula?

_____

Escribe qué día no circulan en la Ciudad de México los vehículos con las siguientes placas:

EUC 517 _____ 691 FSL _____

FUX 719 _____

Después, hay que tomar en cuenta que la unidad, en ambos casos es un millón:

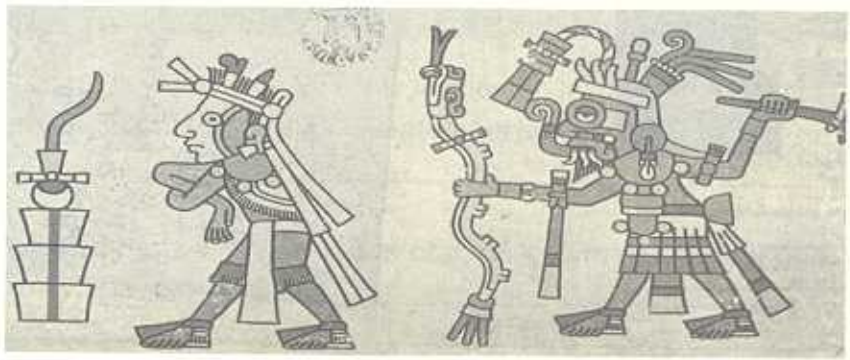
¿Cuánto es $\frac{5}{10}$ de 1 000 000? _____

¿Cuánto es $\frac{4}{10}$ de 1 000 000? _____

Entonces, 29.5 millones = 29 500 000
y, 2.4 millones = _____

Las fracciones decimales son sólo un subconjunto de las fracciones, pero permiten dar aproximaciones tan precisas como se quiera de cualquier fracción. Además, presentan la gran ventaja de poderse anotar con el sistema decimal de numeración, lo que facilita la operatoria con ellas. Sin embargo, también sucede que al representar las fracciones con una notación parecida a la que se usa para los números naturales, y operar con ellas también de una manera parecida, se propicia que los niños piensen que las fracciones decimales tienen las mismas propiedades que los enteros. Esto los lleva a cometer errores como afirmar que 0.125 es mayor que 0.2 (puesto que 125 es mayor que 2), o que el resultado de 10 x 0.2 debe ser mayor que 10, puesto que la multiplicación siempre "agranda".

Por ello, es importante no pasar demasiado pronto a la operatoria con decimales y, en cambio, realizar numerosas actividades de medición de longitudes que permitan a los niños ***verificar*** *los resultados que obtienen a nivel numérico. También es conveniente regresar con frecuencia a la notación fraccionaria de los decimales, con preguntas como: ¿Qué fracción representa el 0.02? ¿Qué significa el 3 en 25.43?*



Actividad 3

Medidas y decimales

En esta actividad expresará diversas medidas de distintas maneras.

1. En algunos puentes, envases, albercas, recibos de pago, etcétera, suele haber letreros como los siguientes:

A ***Altura máxima*** ***4.35 m***	B ***Profundidad máxima*** ***3.45 m***
C ***Peso*** ***2.34 kg***	D ***Contenido neto*** ***2.3 l***
E ***Consumo*** ***$13.4***	F ***Capacidad*** ***6.125 l***

Anote en cada renglón dos maneras de expresar las cantidades anteriores, como se muestra en el ejemplo.

A: _____

B: _____

C: 2 Kg + 34 decagramos o 2 340 gramos

D: _____

E: _____

F: _____

2. Represente cada una de las cantidades anteriores en las rectas de abajo. En cada caso marque previamente una unidad de medida.

A:

B:

C:

D:

E:

F:

3. Escriba con la notación decimal las siguientes cantidades:

a) 8 pesos, 5 centavos: _____ pesos
b) 8 pesos, 50 centavos: _____ pesos
c) 4 metros, 35 milímetros: _____ metros
d) 3 metros, 15 milímetros: _____ metros
e) 5 horas, 12 minutos: _____ horas
f) 3 litros, 15 mililitros: _____ litros
g) 6 kilogramos, 25 gramos: _____ kilogramos
h) 2 kilómetros, 50 metros: _____ kilómetros
i) 3 días, 6 horas: _____ días

12 minutos es $\frac{1}{5}$ de una hora ó $\frac{2}{10}$ de una hora. Por lo tanto, 12 minutos = 0.2 horas.

4. Anote de dos maneras diferentes la cantidad que corresponde a cada punto señalado con la flecha:

Actividad 4

Un poco más sobre números decimales

Las fracciones decimales son aquéllas que se generan al dividir sucesivamente en 10 a la unidad, es decir aquéllas cuyo denominador es una potencia de 10: 10, 100, 1 000, 10 000, etcétera. Por ejemplo: $\frac{3}{10}$, $\frac{21}{100}$, $\frac{4}{1000}$.

Estas fracciones obedecen al principio de agrupamientos de 10 en 10 que caracteriza a nuestro sistema decimal de numeración. Así como 10 decenas forman una centena, 10 centenas forman un millar, etc., 10 milésimos forman 1 centésimo, 10 centésimos forman 1 décimo, 10 décimos forman una unidad.

Por esto, las fracciones decimales se pueden representar con el sistema decimal de numeración (notación decimal).

$$8 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000} = 8.347$$

En esta actividad analizaremos un poco más este subconjunto de las fracciones.

1. ¡Atrape la fracción! Realice el siguiente juego con al menos dos compañeros:

- Piense en una fracción decimal, la que usted quiera, por ejemplo $\frac{23}{100}$.
- Sus compañeros, por turnos, le harán hasta 10 preguntas entre los dos, para tratar de averiguar cuál es la fracción en la que usted pensó. Usted sólo puede contestar "***sí***" o "***no***".
- Después de hacer las preguntas, cada uno escribe la fracción que considera es la correcta.
- Gana el que se haya aproximado más.
- Vuelvan a jugar. Ahora toca a otro compañero pensar en una fracción decimal.

Posiblemente, al realizar el juego anterior, usted haya observado que las fracciones decimales permiten establecer con facilidad intervalos cada vez más chicos.

Por ejemplo, si ya se sabe que el número buscado está entre $\frac{85}{100}$ y $\frac{86}{100}$, para cerrar más el intervalo se puede convertir a milésimos, $\frac{850}{1000}$ y $\frac{860}{1000}$ y preguntar: ¿es mayor que $\frac{855}{1000}$?

2. Conteste las siguientes preguntas:

¿Que fracción representa el 2 en 0.126? _____
¿Qué fracción representa el 26? _____
¿Por qué un décimo, más 2 centésimos, más 6 milésimos es lo mismo que 126 milésimos? _____
¿Por qué 0.5 y 0.5000 representan al mismo número?

_____

¿Por qué 0.5 y 0.0005 no representan al mismo número?

_____

¿Qué número es mayor, 0.194 ó 0.2? _____
¿Por qué? _____

_____

3. Trace las lineas con las medidas que se indican. La unidad de referencia es la que aparece dibujada a continuación:

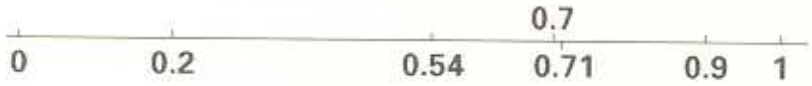
A: 0.2 unidades **B**: 0.194 unidades **C**:1.190 unidades

A:

B:

C:

4. Ubique los siguientes números entre los que están puestos en la recta: 0.5; 0.19; 0.711; 0.708



5. Escriba cinco números que estén entre cero y uno y que cumplan con lo siguiente: el más grande debe tener una cifra decimal, el siguiente dos cifras, el siguiente tres cifras, y así hasta el más pequeño de cinco cifras.

_____

6. Escriba un número que esté entre 3.256 y 3.257.

_____

En el conjunto de los números naturales, todo número tiene un sucesor. Así, después del uno está el dos, después del dos está el tres, etc. Entre dos y tres no hay ningún número. En cambio, en el conjunto de las fracciones, entre dos números, siempre hay otro: entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{2}{10}$ está, entre otros, $\frac{11}{100}$, entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{11}{100}$ está $\frac{101}{1000}$.

7. Represente con la notación decimal las siguientes fracciones. Escriba, para cada una, 6 cifras después del punto.

$\frac{21}{1000}$ = _____

$\frac{7}{125}$ = _____

$\frac{5}{33}$ = _____

8. ¿Qué diferencia observa entre las dos primeras fracciones y la tercera?

_____

_____

Divida la siguiente figura en cuatro partes de igual forma y tamaño.

Las fracciones $\frac{21}{1000}$ y $\frac{7}{125}$ son fracciones decimales.

Multiplicando el numerador y el denominador de la fracción $\frac{7}{125}$ por 8, se obtiene la fracción equivalente $\frac{56}{1000}$. En cambio, la fracción $\frac{5}{33}$ no es decimal: no existe ningún número que multiplicado por 33 dé como resultado una potencia de 10 (10, 100, 1000, etcétera).

Esto significa que la fracción $\frac{5}{33}$ no se puede expresar de manera exacta usando fracciones decimales, pero se puede dar una aproximación a ella, tan precisa como se quiera:

$$\frac{5}{33} = 0.15151515... = 0 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{1000} + ...$$

*Por esto, cuando pasamos a notación decimal una fracción no decimal, siempre queda un residuo. A partir de cierto momento, las cifras del cociente se empiezan a repetir. El conjunto de cifras que se repite se llama **periodo**. En 0.151515, el periodo es 15.*

Al expresar la fracción $\frac{5}{33}$ como 0.15, estamos dando sólo una aproximación de la fracción.

Tema 4
Las fracciones como operadores multiplicativos

En el tema 2, "Las fracciones en la medición", se vieron algunas situaciones en las que se multiplicó una medida fraccionaria (multiplicando) por un número entero (multiplicador); por ejemplo "5 veces $\frac{3}{4}$ de centímetro". En este tema se abordarán situaciones en las que las fracciones juegan ahora el papel de un multiplicador (operador multiplicativo), es decir, indican un número de veces, por ejemplo, $2\frac{1}{4}$ veces 12 km.

Actividad 1

Tres y media vueltas

En esta actividad se analiza una primera situación que da lugar al uso de las fracciones como operador multiplicativo.

1. Resuelva el siguiente problema.

Un trenecito recorre un circuito de 12 kilómetros. Complete los datos que faltan en la tabla:

Número de vueltas	Total de kilómetros
1	12 km
3	
6	
$\frac{6}{2}$	
$2\ y\ \frac{1}{4}$	
$\frac{3}{4}$	
$\frac{5}{6}$	
0.75	

¿Qué operación utilizó para calcular el total de kilómetros del tercer renglón? _____

_____

¿Qué operación utilizó en el sextó renglón? _____

_____

Archivo fotográfico de la DGMME / SEP

¿Qué operación utilizó en el último renglón? _____

_____

_____

_____

_____

Observe que todas las preguntas tienen la misma estructura: el trenecito da cierto número de vueltas y hay que calcular el total de kilómetros recorridos. La diferencia es que a veces el número de vueltas (el operador multiplicativo) está dado por un número entero y otras veces por una fracción.

Las expresiones "3 veces 12 kilómetros" o "0.75 veces 12 kilómetros" suelen asociarse a la multiplicación, pero las expresiones " $\frac{6}{2}$ ***de*** *12 kilómetros", o "* $\frac{3}{4}$ ***de*** *12 kilómetros", que son equivalentes a las anteriores, no se suelen asociar a la multiplicación, aunque... ¡también lo son!*

Hay por lo menos dos motivos que dificultan asociar las expresiones anteriores con multiplicaciones: uno es el hecho de que no solemos decir " $\frac{3}{4}$ *veces 12 kilómetros". Usamos la preposición* ***de*** *(*$\frac{3}{4}$ ***de*** *12 kilómetros) que sugiere la idea de extracción, no de multiplicación (aunque sí decimos, por ejemplo,* $2\frac{1}{4}$ ***veces****). Por otro lado, y esto es aún más importante, cuando una fracción juega el papel de operador multiplicativo, la multiplicación ya no puede interpretarse como una suma repetida, como se hacía con los números enteros. Además, la multiplicación ya no necesariamente "agranda".*

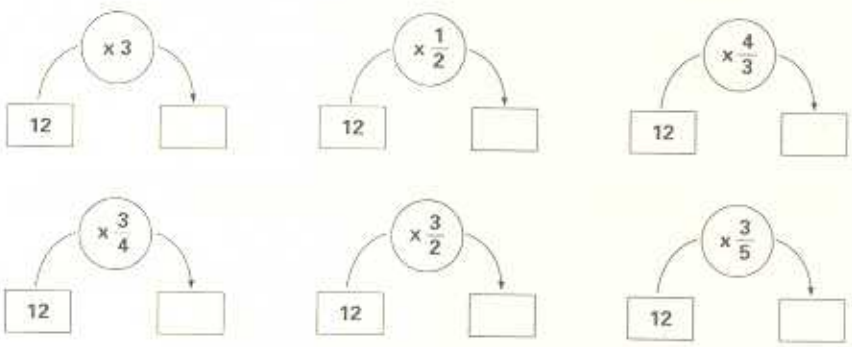
La multiplicación $\frac{3}{4}$ *x 12 kilómetros, interpretada como* $\frac{3}{4}$ ***de*** *12 kilómetros, se puede calcular dividiendo 12 entre cuatro y multiplicando lo que resulte por tres: (12 ÷ 4) x 3 = 9 kilómetros .*

Es decir, aplicar un operador multiplicativo fraccionario a una cantidad, equivalen a dividir y multiplicar sucesivamente esa cantidad. ¡Está en juego una reconceptualización de la noción misma de multiplicación¡

Por ello, en la escuela primaria, no es conveniente formalizar desde el principio las expresiones del tipo " $\frac{3}{4}$ ***de*** *12 kilómetros" como multiplicaciones de fracciones. Deben plantearse, en cambio, variadas situaciones en las que las fracciones se alternen con los números naturales en el papel de operadores multiplicativos, como en la situación del trenecito u otras situaciones que veremos más adelante.*

2. En los siguientes esquemas, el primer número indica los kilómetros que mide el circuito, el segundo número indica el número de vueltas (es un operador multiplicativo) y el tercero (el que se debe calcular), el número de kilómetros que recorre el trenecito.

Calcule y escriba los datos que faltan.



3. Observe que algunos operadores multiplicativos, aplicados a 12 km, arrojan un resultado mayor que 12 km, mientras que otros dan un resultado menor.

¿Qué característica tienen los operadores que arrojan un resultado ***mayor*** que 12?_____

_____

¿Y los que arrojan un resultado ***menor*** que 12?_____

_____

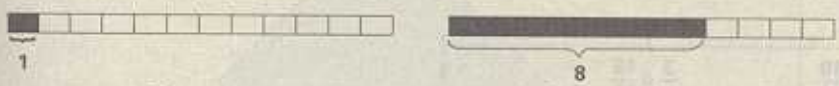
4. En la siguiente tabla se da el total de kilómetros que recorrió el trenecito. Calcule, en cada caso, el número de vueltas que dio. Cuando el número de vueltas no sea entero, procure expresar el resultado utilizando fracciones.

Número de vueltas	Total de kilómetros
1	12 km
	120 km
	6 km
	16 km
	90 km
	20 km

Estos problemas consisten en determinar el operador multiplicativo que, aplicado a una cantidad, da la otra cantidad.

En el último problema, por ejemplo, se trata de averiguar cuántas vueltas de 12 km dio el trenecito al avanzar 20 km. Dio una vuelta más 8 kilómetros, pero ¿qué parte de una vuelta representan 8 km? Para saberlo, necesitamos averiguar qué parte de 12 km son 8 km o "cuántas veces" 8 km es igual a 12 km.

Una forma de averiguarlo es ver primero qué parte de 12 es uno:



Uno es $\frac{1}{12}$ de 12

Entonces 8 es $\frac{8}{12}$ de 12 ó $\frac{2}{3}$ de 12

Así, al avanzar 20 km, el trenecito da $1\frac{2}{3}$ vueltas.

Complete la serie:
$2\frac{2}{3}, 3\frac{1}{3}, 4, \ldots$

4. Si el número de vueltas correspondiente al cuarto renglón se calcula dividiendo 16 entre 12, se obtiene el resultado aproximado: 1.33 vueltas.

¿Ese resultado es mayor que una vuelta y media? _____

¿Qué fracción de vuelta representa el 0.33? _____

5. En las situaciones anteriores se aplicó un operador multiplicativo fraccionario a un número entero.

Por ejemplo, $\frac{5}{6}$ de 12 km = $\frac{5}{6}$ x 12 km = (12÷6) x 5 = 10 km.

Suponga que se trata ahora de un circuito pequeño, de $\frac{3}{4}$ de milla. De esta manera, ambos factores podrán ser fracciones.

Calcule, ***sin convertir a metros o kilómetros***, lo siguiente:

a) ¿Qué fracción de milla avanza el trenecito, si da $\frac{1}{4}$ de vuelta?

_____

b) ¿Cuánto avanza el trenecito si da $\frac{3}{2}$ de vuelta?

_____

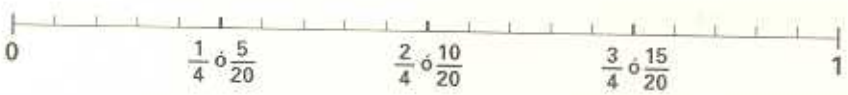
c) ¿Cuánto avanza el trenecito si da $\frac{2}{5}$ de vuelta?

_____

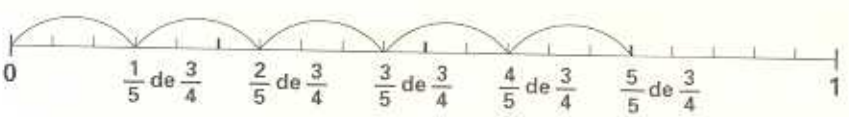
6. Complete el siguiente procedimiento para resolver la pregunta (c).

Dividimos una milla en 20 partes (5 x 4) para poder tomar cuartos y después quintos:

Representamos $\frac{3}{4}$ ó $\frac{15}{20}$ de milla:



Dividimos $\frac{3}{4}$ de milla en quintos:



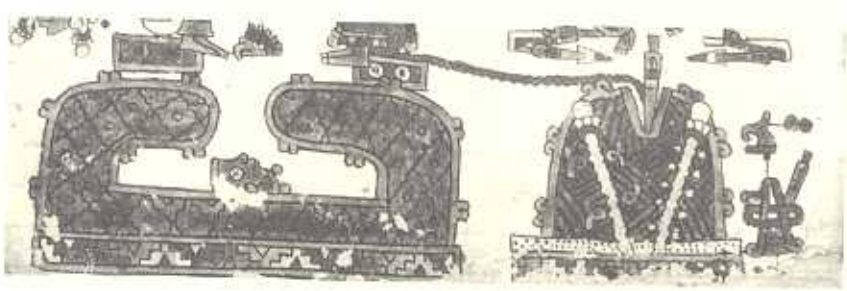
Entonces $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$ de milla es igual a _____

7. Complete el siguiente procedimiento para resolver la pregunta (c):

Se trata de averiguar cuánto es $\frac{2}{5}$ ***de*** *$\frac{3}{4}$ de milla.*

Calculamos primero $\frac{1}{5}$ ***de*** *$\frac{3}{4}$ de milla, que equivale a la quinta parte* ***de*** *$\frac{3}{4}$ de milla, y es igual a _____ de milla.*

$\frac{2}{5}$ ***de*** *$\frac{3}{4}$ de milla es el doble que $\frac{1}{5}$* ***de*** *$\frac{3}{4}$ de milla, y por lo tanto es igual a _____ de milla.*

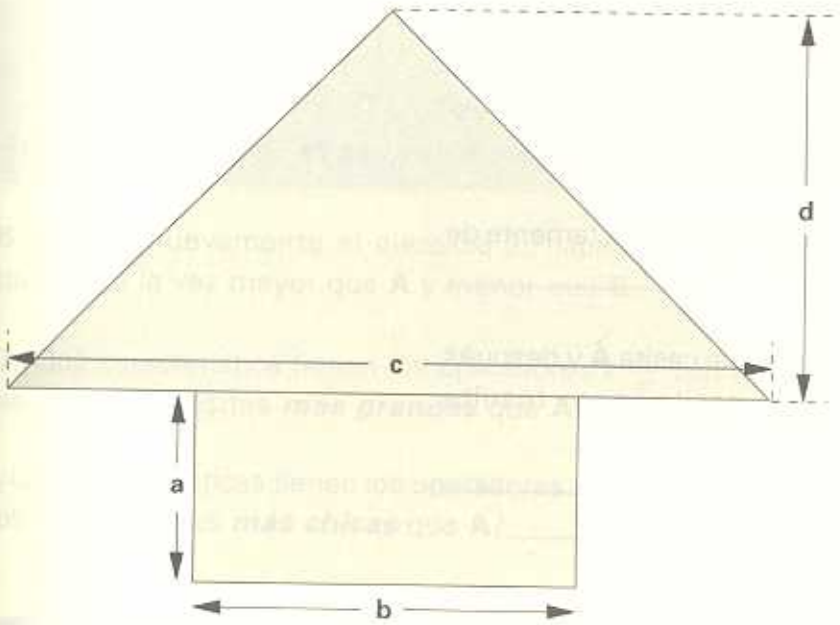


Actividad 2

La escala

El trazo de figuras a escala constituye una fuente de interesantes problemas que dan lugar al uso de la fracción como operador multiplicativo.

1. Dibuje en su cuaderno la casita **A**, con las medidas que se indican.



a = 3 cm **b = 6 cm** **c = 12 cm** **d = 6 cm**

2. Ahora dibuje una casita **B** a escala de **A**, de tal manera que sus lados midan el doble de los de la casita **A**.

3. En el punto anterior aplicó el operador multiplicativo (x 2) a las medidas de **A**, para obtener **B**. Ahora se trata de dibujar otra casita **C** a escala de **A**, que sea más grande que **A**, pero más chica que **B**. ¿Cuál puede ser el operador multiplicativo?

Aplique el operador a las medidas de **A** y dibuje, en su cuaderno, la casita **C** para verificar si cumple con la condición pedida. Si no lo logra, continúe con la actividad. Volveremos sobre este ejercicio más adelante.

4. Ahora se van a aplicar, sucesivamente, dos operadores a la casita **A**. Al aplicar el operador (÷ 2) a la casita **A**, se obtiene la casita **E**. Al aplicar el operador (x 3) a la casita **E**, se obtiene la casita **F**.

¿Qué casita piensa que saldrá más grande, la **A** o la **F**? _____

- Dibuje en su cuaderno las casitas para comprobar su respuesta.

¿Qué operador multiplicativo permite pasar directamente de la casita **A** a la casita **F**? _____

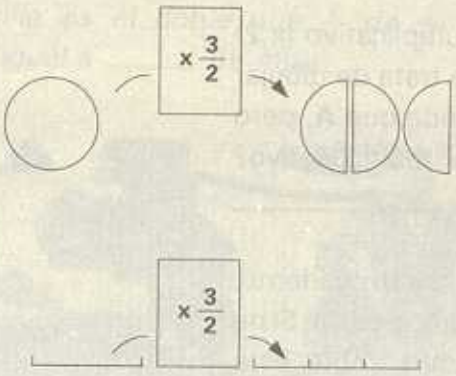
5. Si primero se aplica el operador (x 3) a la casita **A** y después se aplica el operador (÷2), la casita que resulte ¿será más grande o más chica que la **F**?

_____

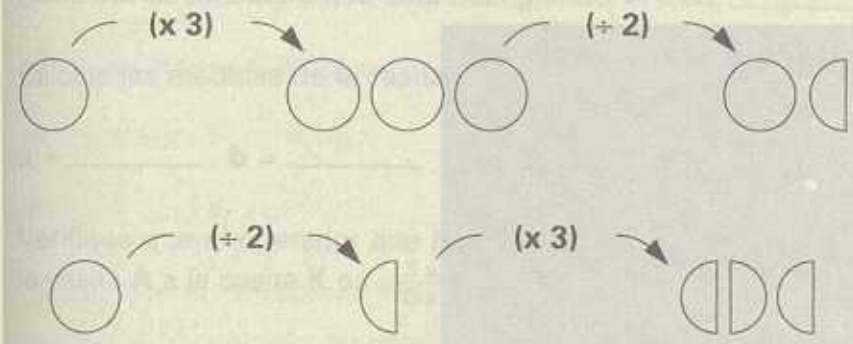
- Dibuje las casitas y compruebe su respuesta.

Observe que la casita **F** es más grande que **A** y más chica que **B**. Es decir, cumple con la condición que se pidió en el ejercicio 3. ¿Es la misma que usted hizo?

Cuando se aplica el operador $x\frac{3}{2}$ a una medida, o a una colección, se divide esa medida entre 2 y el resultado se multiplica por 3.



Es decir, aplicar el operador x $\frac{3}{2}$ es equivalente a aplicar sucesivamente los operadores (÷ 2) (x 3). Si se aplican estos operadores en distinto orden, se obtiene el mismo resultado:



Así, el operador x $\frac{3}{2}$ es equivalente a (x3) (÷ 2) ó a (÷ 2) (x 3).

6. Realice nuevamente el ejercicio 2, haciendo otra casita que sea a la vez mayor que **A** y menor que **B**.

7. ¿Qué característica tienen los operadores x $\frac{a}{b}$ con los que se obtienen casitas ***más grandes*** que **A**? _____

¿Qué características tienen los operadores x $\frac{a}{b}$ con los que se obtienen casitas ***más chicas*** que **A**? _____

Actividad 3

Operador fraccionario y medidas fraccionarias

Hasta aquí, se ha aplicado un operador fraccionario a medidas enteras. Ahora aplicaremos el operador a medidas fraccionarias.

En esta actividad, utilizaremos la siguiente unidad de medida. Prepare seis ejemplares de la unidad:

Material:

- Tiras de cartoncillo.

1. Utilice las tiras de cartoncillo para dibujar en su cuaderno una casita **G** con las siguientes medidas:

a = $\frac{1}{2}$ de U **b** = $\frac{5}{4}$ de U **c** = $\frac{4}{3}$ de U **d** = $\frac{1}{2}$ de U

2. Aplique el operador $\times \frac{3}{2}$ a la casita **G**, para obtener la casita **H**, y escriba aquí sus medidas.

a = _____ **b** = _____ **c** = _____ **d** = _____

Observe que aplicar el operador $\times \frac{3}{2}$ *o* $\frac{3}{2}$ ***de****, equivale a dividir entre 2 y multiplicar por 3:*

$\frac{3}{2}$ ***de*** $= (\div 2)(x3)$. *Por lo tanto,* $\frac{3}{2}$ ***de*** $\frac{5}{4} = (\frac{5}{4} \div 2) \times 3$

Como $(\frac{5}{4} \div 2)$ *es igual a* $\frac{5}{8}$, *entonces:* $\frac{3}{2}$ ***de*** $\frac{5}{4} = \frac{5}{8} \times 3$

Y como $\frac{5}{8} \times 3$ *es igual a* $\frac{15}{8}$, *entonces:* $\frac{3}{2}$ ***de*** $\frac{5}{4} = \frac{15}{8}$

Así, $\frac{3}{2}$ ***de*** $\frac{5}{4}$ *es igual a* $\frac{3 \times 5}{2 \times 4} = \frac{15}{8}$

Aplicar un operador multiplicativo fraccionario a una medida fraccionaria da lugar a una multiplicación de dos fracciones.

3. Hay otra situación, también interesante, que da lugar a la multiplicación de dos fracciones: la aplicación sucesiva de dos operadores fraccionarios.

Retomemos la casita **A**. Aplique a la casita primero el operador $\times \frac{3}{2}$ y después el operador $\times \frac{3}{4}$ para obtener la casita **J**.

Escriba aquí las medidas que obtiene:

a = _____ **b** = _____ **c** = _____ **d** = _____

¿Qué operador permite pasar directamente de **A** a **J**? _____

Verifique su respuesta aplicando el operador.

Observe que: $\frac{3}{4}$ ***de*** $= (\div 4)(x 3)$ $\quad\quad$ $\frac{3}{2}$ ***de*** $= (\div 2)(x 3)$

Entonces: $\frac{3}{4}$ ***de*** $\frac{3}{2}$ ***de*** $= [(\div 4)(x 3)][(\div 2)(x 3)]$

El orden de los operadores se puede cambiar sin alterar el resultado: $\frac{3}{4}$ ***de*** $\frac{3}{2}$ ***de*** $= [(\div 4)(\div 2)][(x 3)(x 3)]$

$= (\div 8)(x 9) = \frac{9}{8}$

4. Se van a aplicar a la casita **A** los operadores $\frac{5}{6}$ ***de*** y $\frac{3}{4}$ ***de*** para obtener la casita **K**.

¿Qué casita considera que será más grande, **A** o **K**? _____

Calcule las medidas de la casita **K**:

a = _____ **b** = _____ **c** = _____ **d** = _____

Verifique que el operador que permite pasar directamente de la casita **A** a la casita **K** es $\frac{5 \times 3}{6 \times 4} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

Actividad 4

¿Qué parte de 60 000 es 25 000?

En esta actividad revisaremos otro significado de la fracción, muy relacionado con el de operador multiplicativo: la fracción como expresión de una relación entre dos cantidades.

1. Calcule lo que se pide:

a) $\frac{3}{4}$ de una población de 60 000 habitantes = _____

b) $\frac{3}{4}$ de hora = _____ minutos

c) $\frac{2}{5}$ de kg = _____ gramos

d) $\frac{3}{10}$ de un millón de pesos = _____ pesos

Para calcular $\frac{3}{4}$ de 60 000, se puede hacer lo siguiente:

$\frac{1}{4}$ *de 60 000 = 60 000 ÷ 4 = 15 000*

$\frac{3}{4}$ *de 60 000 = 15 000 x 3 = 45 000*

Al hacer este cálculo, se pone en evidencia que aplicar el operador "$\frac{3}{4}$ ***de****" a una cantidad, equivale a dividir y multiplicar sucesivamente esa cantidad.*

2. En una población de 60 000 habitantes, 40 000 son menores de 30 años, 15 000 son mayores de 30 y menores de 60 años.

¿Los menores de 30 años constituyen más de la mitad de la población?_____

¿Qué parte de la población es menor de 30 años?_____

¿Qué parte de la población tiene entre 30 y 60 años?_____

¿Qué parte de la población tiene más de 60 años?_____

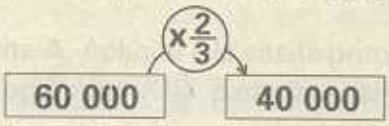
Para saber qué parte de 60 000 es 40 000, puede averiguarse primero qué parte de 60 000 es un divisor común de 60 000 y de 40 000, por ejemplo, 20 000:

20 000 es $\frac{1}{3}$ de 60 000, por lo tanto:

40 000 es $\frac{2}{3}$ de 60 000

÷ 3	60 000	1	÷ 3
x 2	20 000	$\frac{1}{3}$	x 2
	40 000	$\frac{2}{3}$	

Averiguar qué parte de 60 000 es 40 000, equivale a determinar el operador multiplicativo que aplicado a 60 000 da 40 000.



3. Se van a comparar las cantidades de personas que asistieron a la primera función de distintas obras presentadas en un teatro:

Obra 1:	**200**	**personas.**
Obra 2:	100	personas.
Obra 3:	125	personas.
Obra 4:	350	personas.
Obra 5:	400	personas.
Obra 6:	600	personas.

La comparación se va a hacer con respecto a la cantidad de personas que asistieron a la obra 1.

Así, en la obra 3 asistieron $\frac{5}{8}$ de los que asistieron a la obra 1.

Establezca la comparación del número de asistentes a las demás obras con respecto a los asistentes a la obra 1:

a) En la obra 2, asistieron _____

b) En la obra 4, asistieron _____

c) En la obra 5, asistieron _____

d) En la obra 6, asistieron _____

4.Tres jóvenes se turnan durante el día para atender su taller.

Luis trabaja de 8 AM a 10 AM.
Mario trabaja de 10 AM a 14 PM.
José trabaja de 14 PM a 20 PM.

Deciden repartirse las ganancias semanales proporcionalmente al tiempo que trabajan.

a) ¿Cuántas horas al día permanece abierto el taller? _____

b) ¿Qué parte de las ganancias le tocarán a cada uno?

Una pelota de tenis rebota cada vez a una altura igual a la mitad de su altura anterior. Si se deja caer de una altura de 50 metros, calcular la distancia recorrida después de haber rebotado 6 veces.

A Luis _____ de las ganancias.

A Mario _____ de las ganancias.

A José _____ de las ganancias.

c) En el cuadro que sigue aparecen las ganancias que obtuvieron en 4 semanas. Calcule cuánto le corresponde a cada uno.

	A Luis	A Mario	A José
1a. semana: 90 pesos			
2a. semana: 60 pesos			
3a. semana: 120 pesos			
4a. semana: 200 pesos			

5. Según un reporte de una empresa, la proporción de productos defectuosos en el último mes fue de $\frac{2}{5}$. Si la producción fue de 5 000 productos, ¿aproximadamente cuántos productos estaban defectuosos?

_____

Hay situaciones en las que no interesa tanto el número de elementos de una cantidad, sino saber qué parte es de otra cantidad. Las fracciones permiten expresar esa relación.

Por ejemplo, en situaciones de ***variación****, cuando una cantidad es una parte proporcional de otra ("A Luis le corresponden $\frac{1}{6}$ de las ganancias semanales"), o en situaciones en las que no hay variación, pero interesa destacar la relación entre un todo y una parte ("$\frac{2}{5}$ de los productos estaban defectuosos"). Por supuesto, los problemas más accesibles son aquéllos en los que ya se conoce la fracción y se aplica a una cantidad, por ejemplo: "A Luis le corresponde $\frac{1}{6}$ de las ganancias; si las ganancias fueron de 60 pesos, ¿cuánto le toca?".*

Son más difíciles los problemas en los que es necesario determinar esa parte ("¿Qué parte de 200 es 125?").

Actividad 5

¿Y la división de fracciones?

En esta actividad se analizan algunos aspectos relacionados con la división.

1. Resuelva los siguientes problemas:

a) Luis mide $\frac{5}{4}$ de metro. Hace sólo tres años medía la mitad. ¿Qué fracción de metro medía hace tres años? _____

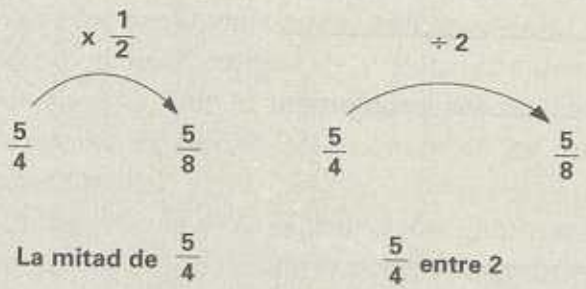
b) Luisa pintó la quinta parte de un listón que medía $\frac{1}{3}$ de metro. ¿Qué fracción de metro de listón pintó? _____

c) La tercera parte de un terreno de 2 hectáreas fue donada a una escuela. ¿Cuánto mide la parte que fue donada? _____

2. En los tres problemas anteriores se aplica un operador multiplicativo fraccionario a una medida. Escriba en el siguiente cuadro, para cada caso, la medida, el operador y el resultado:

	Medida	Operador	Resultado
a)	$\frac{5}{4}$	$\times \frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$
b)			
c)			

Observe que aplicar a una cantidad un operador multiplicativo fraccionario con numerador igual a uno, por ejemplo $\frac{1}{2}$ ***de*** $\frac{5}{4}$*, equivale a dividir esa cantidad entre el denominador del operador:* $\frac{5}{4} \div 2$



Asimismo, la quinta parte de $\frac{1}{3}$ *de metro es lo mismo que* $\frac{1}{3}$ *de metro entre 5, y la tercera parte de 2 hectáreas es lo mismo que 2 hectáreas divididas entre 3.*

Podemos decir que:

Obtener $\frac{1}{n}$ ***de*** *una cantidad o* ***multiplicar*** *una cantidad por $\frac{1}{n}$ es equivalente a* ***dividir*** *esa cantidad entre n.*

¿Y cómo se calcula $\frac{1}{2}$ ***de*** *$\frac{5}{4}$ ó $\frac{5}{4}$ entre 2? Es decir, ¿cómo se divide una fracción entre un número entero? Esto ya lo ha hecho usted varias veces y de distintas maneras en este capítulo: en el tema 2, al resolver la actividad 5 "Partes de partes", y también al resolver la actividad 6 "Hacia la equivalencia de fracciones"; en este mismo tema, cada vez que aplicó un operador multiplicativo del tipo $\frac{1}{n}$.*

Esto significa que es posible, y conveniente, resolver problemas que implican dividir una fracción entre un divisor entero ***sin aplicar algoritmos para dividir fracciones enseñados previamente.***

3. Resuelva ahora los siguientes problemas:

a) Alicia dio un paseo de $\frac{3}{4}$ de kilómetro. Cada octavo de kilómetro se detuvo a descansar. ¿Cuántas veces se detuvo a descansar? _____

b) María observó que al pasar a máquina cada página que escribe a mano, sólo ocupa $\frac{2}{3}$ de página. Cuando María terminó su trabajo, le quedó un texto de 12 páginas a máquina.

¿Su texto a mano tenia más de 12 páginas, o menos? _____

¿Cuántas páginas tenía su texto a mano? _____

4. ¿Qué operaciones utilizó para resolver estos problemas?

_____

5. Termine las siguientes resoluciones de los problemas anteriores:

Problema a)

$\frac{3}{4}$ de kilómetro es equivalente a $\frac{6}{8}$ de kilómetro.
Entonces... _____
_____

Problema b)

$\frac{2}{3}$ *de página a máquina corresponden a una página a mano.*

Por lo tanto, $\frac{1}{3}$ *a máquina corresponde a* $\frac{1}{2}$ *de página a mano.*

Entonces $\frac{3}{3}$ *a máquina, es decir, una página a máquina, corresponde a una página y media a mano.*

Entonces: _____

_____

a máquina	a mano
$\frac{2}{3}$	1
$+\ \frac{1}{3}$	$+\ \frac{1}{2}$
$\frac{3}{3}$	$1\ \frac{1}{2}$

Los problemas anteriores también se pueden resolver con divisiones. En ambos, se conocen dos medidas y es necesario ver ***cuántas veces*** *cabe una en la otra (son problemas de división de tipo "tasativo"), es decir, es necesario encontrar el operador multiplicativo que permite pasar de una a otra:*

En el problema a), se necesita saber cuántas veces cabe $\frac{1}{8}$ *en* $\frac{3}{4}$. *Formalmente, se puede resolver con:*

$\frac{1}{8} \times ? = \frac{3}{4}$ *ó con* $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = ?$

En el problema b), se necesita saber cuántas veces $\frac{2}{3}$ *es igual a 12, es decir:* $\frac{2}{3} \times ? = 12$ *ó bien* $12 \div \frac{2}{3} = ?$

Sin embargo, seguramente usted ya comprobó que estos problemas se pueden resolver sin aplicar un algoritmo para dividir fracciones, incluso, sin considerar que la división está implicada.

Debido a que los problemas que requieren de una división de fracciones son más complejos y poco comunes en la vida cotidiana y que, por lo tanto, comprender el sentido de esta operación es difícil, este contenido se introduce hasta la secundaria.

En los últimos grados de la primaria, los alumnos pueden abordar problemas como los anteriores, poniendo en juego otros recursos. De esta manera pueden propiciarse, además, interesantes reflexiones sobre el significado mismo de las fracciones.

Actividad 6

Nuestros materiales de trabajo

En esta actividad se analizan algunas lecciones de los libros de texto en las que las fracciones son operadores multiplicativos.

Material:

- Libros de texto. Matemáticas. (L. T. M.) 3°, 4°, 5° y 6° grado.

1. En una expresión como *"Tres cuartos de vuelta completa"*, la fracción expresa una medida (en este ejemplo, medida de un giro o de un ángulo). Si se agrega: *"La vuelta completa es de 360 grados, ¿a cuántos grados es igual $\frac{3}{4}$ de vuelta?"*, es necesario aplicar el operador multiplicativo $\frac{3}{4}$ a 360.

Situaciones como ésta se presentan desde tercer grado. Revise las lecciones que se mencionan a continuación y después conteste las preguntas.

"Miel y fruta seca", pág. 126, en L. T. M. 3°.
"La vuelta al mundo en 360 grados", pág. 112, en L. T. M. 4°.
"Mi fiesta", pág.34, en L. T. M. 5°.
"El productor agrícola", pág 89, en L. T. M. 6°.

- Mencione por lo menos tres cantidades a las que se aplican fracciones, en las lecciones que revisó. _____

_____

¿Qué resultados se obtienen al aplicar esas fracciones? ___

_____

¿Cuál de los resultados que anotó le parece más fácil de calcular por los niños? _____

¿Cuál le parece más difícil? _____

¿Qué recurso considera que podrían utilizar los niños para calcular $\frac{3}{4}$ de 10 000 metros cuadrados? _____

_____

2. Resuelva la lección "La casa suiza", pág. 84 del L. T. M. 4°.

¿Qué número se utiliza como operador al dibujar la casa grande? _____

¿Qué número se utiliza como operador al dibujar la ventana de la casa original? _____

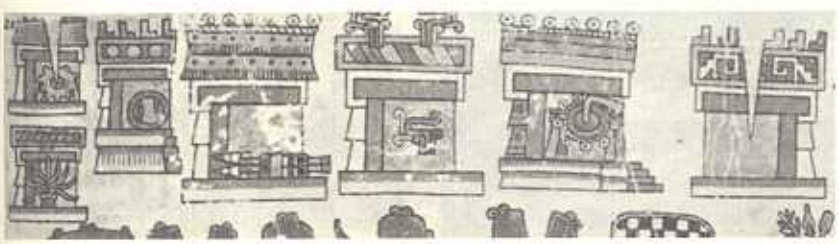
_____

3. Resuelva la lección "Colorea y aprende", págs. 156 y 157 del L. T. M. 5°.

El brazo del robot original de la página 157 mide 4 unidades de largo. Anote las medidas que faltan en la tabla de abajo.

Mundos	Alfa	Beta	Gama	Normal
Tamaño de las casas	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	1
Largo del brazo				
Ancho de la cabeza				

Compruebe que las medidas que obtuvo coinciden con las que se ven en las cuadrículas de la página 157.



4. Resuelva la lección "Datos interesantes", pág. 144 del L. T. M. 4°.

¿En cuál de los datos que se presentan, una fracción decimal juega el papel de operador multiplicativo? _____

_____

En los ejemplos que hemos visto en este tema, la fracción tiene el significado de ***operador multiplicativo*** *porque indica* ***el número de veces*** *que se considera una medida (el número de vueltas, el número de veces que crece o decrece una medida).*

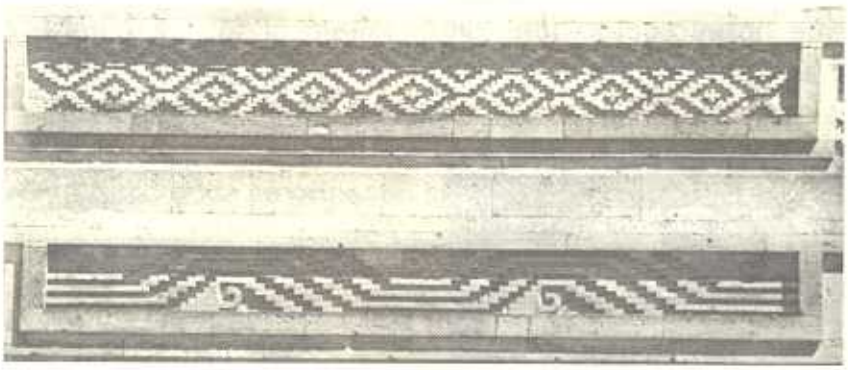
Las expresiones como $\frac{3}{4}$ ***de*** *12 km,* $\frac{1}{6}$ ***de*** *60 pesos,* $\frac{3}{4}$ ***de*** $\frac{3}{2}$*, indican multiplicaciones con fracciones y pueden representarse así:* $\frac{3}{4} \times 12$ *km,* $\frac{1}{6} \times 60$ *pesos,* $\frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$.

Notemos que en estos casos la multiplicación ***ya no es*** *equivalente a una suma repetida. La multiplicación ya no necesariamente "agranda". Así, por ejemplo,* $\frac{1}{2} \times 10 = 5$

Por lo tanto, al trabajar con fracciones como operadores multiplicativos es necesario reconceptualizar, enriquecer, nuestra idea de multiplicación, es necesario ***ir contra ciertas ideas*** *que a lo largo de nuestra experiencia con números enteros, se han consolidado.*

Por ello, ***es muy importante no formalizar prematuramente*** *estas operaciones como "multiplicación de fracciones". Es conveniente que los alumnos de quinto y sexto grados trabajen, en diversas situaciones, con expresiones como:* $\frac{3}{4}$ ***de*** *las ganancias,* $2\frac{3}{4}$ ***veces****, 0.75 vueltas,* $\frac{3}{4}$ ***de*** *12 cm, etcétera.*

Volveremos sobre este aspecto de las fracciones en el capítulo II "Procesos de cambio".



Tema 5
Las fracciones como resultado de una división

La fracción también puede definirse como el resultado de una división de números enteros. En el presente tema se analizan algunas situaciones que dan lugar a este significado.

Actividad 1

La usamos sin saberlo

Veamos primero una situación en la que es muy común recurrir a la fracción como división de enteros.

1. Trace abajo un segmento que mida $\frac{2}{7}$ de su "cuarta" (distancia entre su dedo pulgar y su dedo meñique con la mano extendida):

¿Cuántas cuartas necesitó poner para obtener la medida solicitada? _____

2. Trace ahora un segmento que sea igual a dos cuartas entre siete:

¿Cuántas cuartas necesitó poner para obtener la medida solicitada? _____

3. Escriba, con notación decimal, una aproximación de la fracción $\frac{2}{7}$.

Para escribir una aproximación a la fraccción $\frac{2}{7}$ con la notación decimal, se suele dividir 2 entre 7:

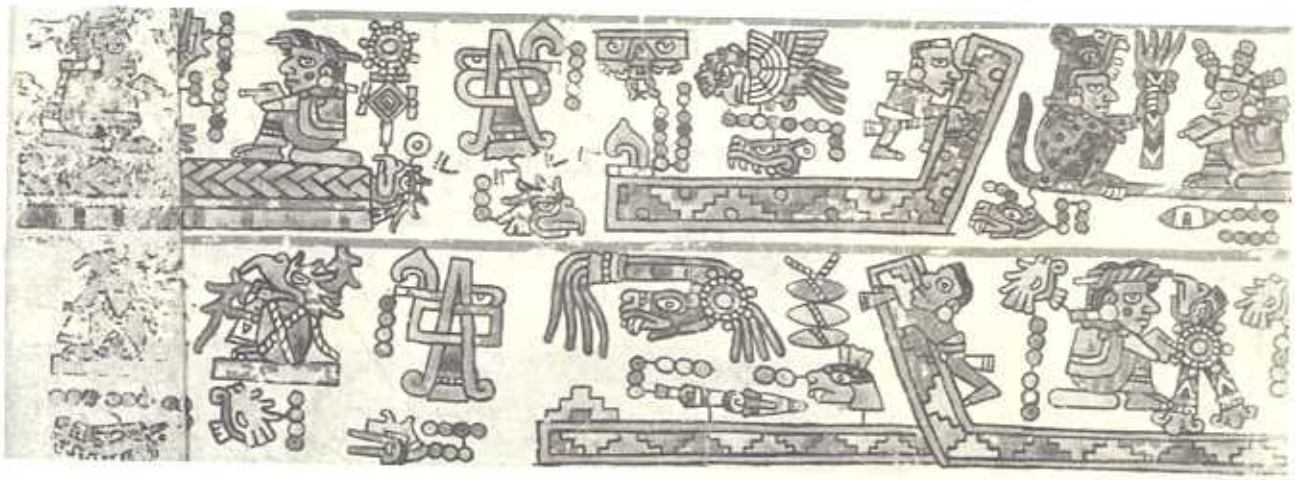
$$\begin{array}{r} 0.28 \\ 7\overline{)20} \\ \quad 60 \\ \quad\ 4 \end{array}$$

Es decir, se establece la equivalencia: $\frac{2}{7} = 2 \div 7$

Sin embargo, hasta donde hemos visto, $\frac{2}{7}$ significa ***una unidad*** *que se parte en 7 y de la que se toman 2 partes:*

En cambio, $2 \div 7$ significa ***dos unidades*** *que se dividen entre 7:*

Es claro que se trata de dos "cosas" distintas entre las que se establece, en ciertas circunstancias y de manera no explícita, una equivalencia.



Actividad 2

Volvamos al reparto de pasteles

En esta actividad se analiza la equivalencia entre $\frac{a}{b}$ y $a \div b$

1. Indique, con una fracción, la cantidad de pastel que le toca a cada niño, en cada uno de los siguientes repartos. De preferencia, dibuje los repartos.

3 pasteles entre 4 niños, _____

5 pasteles entre 3 niños, _____

7 pasteles entre 5 niños, _____

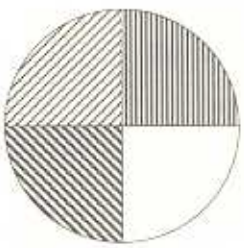
5 pasteles entre 6 niños, _____

2. Si se reparten 3 pasteles entre 4 niños, a cada niño le toca $\frac{3}{4}$ de pastel. El numerador de la fracción que resultó es igual al número de pasteles, y el denominador es igual al número de niños.

Verifique que esto mismo sucede con los demás repartos. ¿Cree usted que sucederá lo mismo con cualquier división, por ejemplo, cree usted que el resultado de 25 entre 37 será $\frac{25}{37}$?

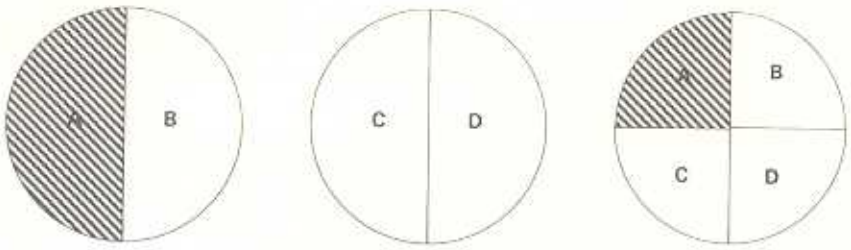
3. Parece que el resultado observado no es una coincidencia. Para saber si esto debe suceder siempre, es necesario comprender por qué sucede.

$\frac{3}{4}$ de pastel significa un solo pastel, partido en cuatro partes iguales, de las que se toman tres:



Un vendedor tiene sólo 3 tipos de pesas; con ellas puede pesar cualquier número entero de kilos entre 1 a 13 inclusive. ¿Qué pesas tiene?

3 pasteles entre 4 significa, por ejemplo, que se dividen tres pasteles entre cuatro niños.



¿Por qué el resultado es $\frac{3}{4}$ de pastel?

Intente explicarlo. Escriba las conclusiones en su cuaderno. Si no puede hacerlo ahora, continúe de todas maneras con el punto siguiente.

4. Veamos un ejemplo en la recta numérica.

a) Marque en la primera recta la fracción $\frac{3}{4}$ de unidad.

b) Ahora marque en la segunda recta el resultado de dividir 3 unidades entre 4. Para ello, divida el segmento que va de cero a tres, en 4 partes iguales.

Observe que 3 unidades entre 4 coincide con $\frac{3}{4}$ de unidad Intente nuevamente explicar por qué se da esta igualdad.

5. Veamos ahora distintas maneras de explicar esta regularidad.

a) En el reparto de tres pasteles entre cuatro niños, imagine que se reparte cada pastel por separado entre los cuatro niños.

Cuando reparte el primer pastel, ¿qué parte de ese pastel le toca a cada niño? _____

Cuando reparte el segundo pastel, ¿qué parte de ese pastel le toca a cada niño? _____

Cuando reparte el tercer pastel, ¿qué parte de ese pastel le toca a cada niño? _____

Entonces, en total, a cada niño le toca 3 veces $\frac{1}{4}$ de pastel, es decir $\frac{3}{4}$ de pastel.

Si hubieran sido cinco pasteles, ¿cuánto le hubiera tocado a cada niño? _____

¿Si hubieran sido nueve pasteles? _____

¿Si hubieran sido tres pasteles y cinco niños? _____

¿Si hubieran sido tres pasteles y trece niños? _____

Se ve claro entonces que si se reparte un número **n** de pasteles entre un número **m** de niños, a cada niño le tocarán **n** pedazos de $\frac{1}{m}$ de pastel, es decir, $\frac{n}{m}$ de pastel.

Por lo tanto, el resultado de la división **n** pasteles entre **m** niños es igual a la fracción $\frac{n}{m}$ de pastel.

b) Veamos otra explicación, apoyándonos en la recta numérica:

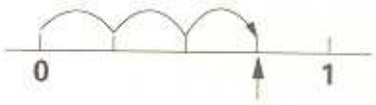
Vamos a marcar en la recta el resultado de dividir 3 unidades entre 4, con el siguiente procedimiento:

Sabemos que el resultado de esa división es menor que una unidad. Vamos a suponer que se nos da únicamente el tramo de recta que va de cero a uno, es decir, una sola unidad, para señalar ahí el resultado de dividir 3 unidades entre 4.

Decidimos entonces señalar primero el resultado de dividir una sola unidad entre 4 (en vez de tres unidades entre cuatro).¿Qué fracción resulta? _____

Un mercader de aceite que con grandes sacrificios abrió su tienda, pudo después de ocho años incrementar en $\frac{5}{9}$ la cantidad de vasijas, encontrándose entonces con 42 vasijas. ¿Con cuánto comenzó su tienda?

El resultado de dividir 3 unidades entre 4 debe ser tres veces más grande, es decir:



Así, vemos nuevamente que 3 unidades divididas entre 4 es igual a $\frac{3}{4}$ de unidad.

3 ÷ 4 = 3 veces (1 ÷ 4) = 3 veces $\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Por cierto, este procedimiento constituye una solución posible al problema 8 de la actividad 3, del tema 1.

c) Veamos una manera más de explicar esta igualdad, esta vez a nivel numérico:

¿Qué número multiplicado por 25 da 1 625? _____

¿Qué operación se puede hacer para encontrarlo rápidamente?

_____

Puede decirse que ese número es el resultado de ***dividir*** 1 625 entre 25.

En general, el número que multiplicado por **m** da **n**, es el resultado de la división **n ÷ m**.

m x ? = n, ? = n ÷ m

¿Qué número multiplicado por 4 da 3? _____ Puede buscar primero la división para pasar de 4 a 1, después la multiplicación para pasar de 1 a 3. El operador que sustituye a esos dos, es el número buscado.

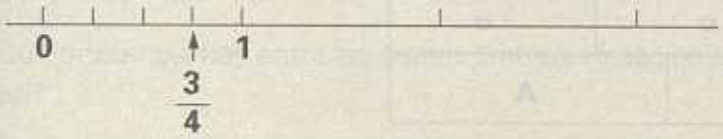
Como esa fracción es el número que multiplicado por 4 da 3, puede decirse que es el resultado de dividir 3 entre 4, entonces, 3 ÷ 4 = _____ ¡otra vez!

$4 \times \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$ $\qquad$ $\frac{3}{4} = 3 \div 4$

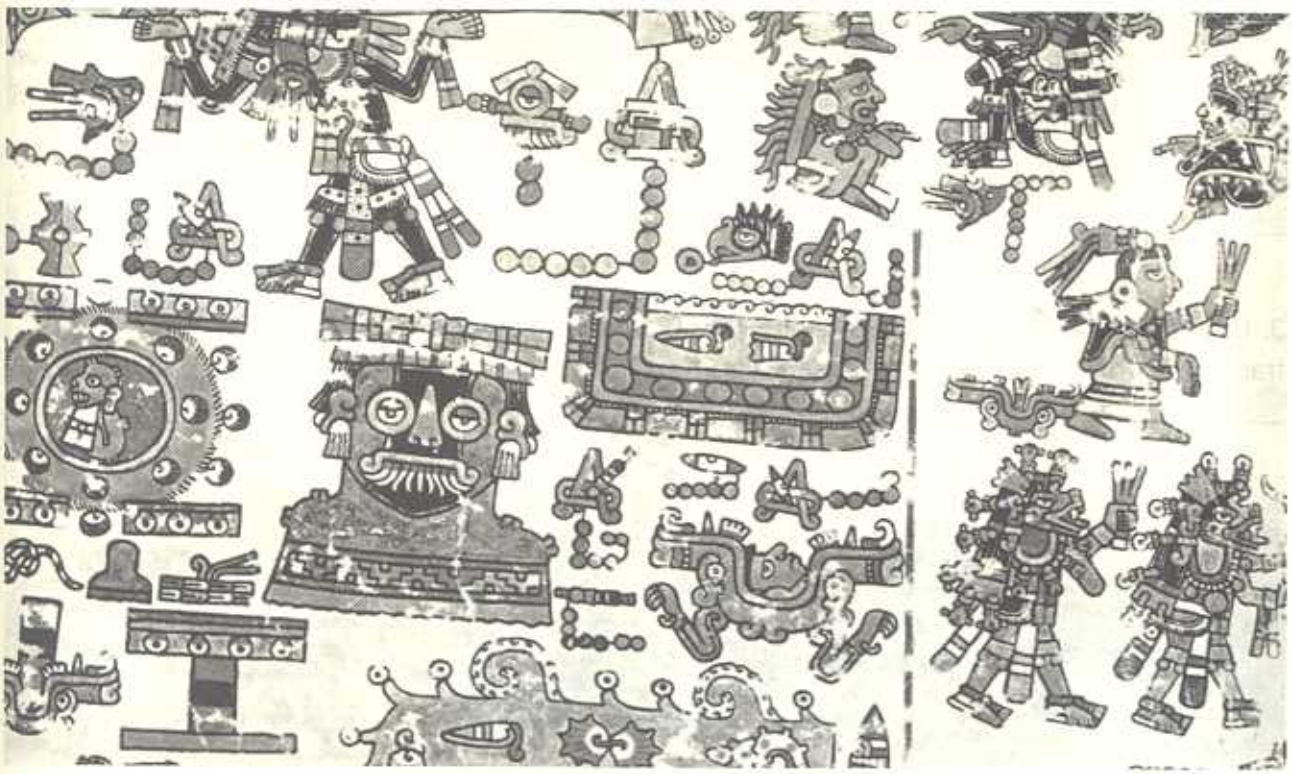
Por lo tanto, $\frac{3}{4}$ es el resultado de la división 3 ÷ 4

*Hemos visto entonces que el resultado de una división $a \div b$ es la fracción $\frac{a}{b}$. Dicho en sentido inverso, cualquier fracción $\frac{a}{b}$ es el resultado de la división **a** ÷ **b**, es decir, es el número que multiplicado por **b** da **a**. Éste constituye otro significado de la fracción: la fracción como resultado de una división o como cociente.*

$\frac{3}{4}$ como fracción de unidad significa una unidad partida en cuatro de la que se toman tres partes.



$\frac{3}{4}$ como cociente, significa 3 unidades divididas entre 4 o, también, el número que multiplicado por 4 da 3.



Actividad 3

Tres problemas

Los problemas que se presentan a continuación pueden resolverse fácilmente a partir del significado de las fracciones como cociente.

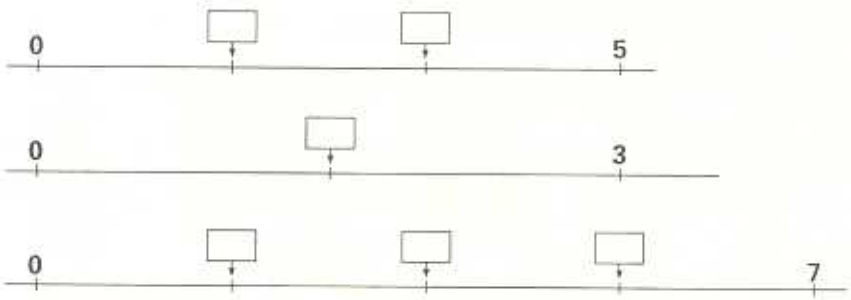
1. Tres tiras **A**, alineadas, coinciden en longitud con cuatro tiras unidad:

u	u	u	u
A	A	A	

¿Qué fracción de la unidad mide cada tira **A**?_____

¿Por qué?_____

2. Escriba las fracciones que corresponden a los puntos que se indican.



3. Una pila de 50 hojas iguales tiene una altura de 4 mm, ¿qué fracción de milímetro mide el espesor de un sola hoja?

_____

Actividad 4

El paso a la notación decimal

Para escribir una fracción con la notación decimal, no es indispensable recurrir al significado de la fracción como división.

1. Intente escribir las siguientes fracciones con la notación decimal, sin dividir el numerador entre el denominador.

$\frac{14}{1000}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{12}{125}$, $\frac{2}{3}$

2. ¿Qué diferencia hay entre las cuatro primeras fracciones y la última?

_____

_____

Escribir una fracción decimal con la notación decimal no presenta ninguna dificultad. Basta con encontrar una fracción equivalente con denominador 10, 100, 1000 etc., y después hacer una simple traducción de escritura:

$$\frac{3}{8} \rightarrow \frac{3 \times 125}{8 \times 125} = \frac{375}{1000} = 0.375$$

3. La fracción $\frac{2}{3}$ no es decimal. Termine el procedimiento que se inicia a continuación, para dar aproximaciones decimales a esa fracción:

$\frac{2}{3}$ es dos veces $\frac{1}{3}$. Expresaremos primero $\frac{1}{3}$ de unidad con fracciones decimales:

Si dividimos una unidad en décimos, obtenemos 10 décimos.

$\frac{1}{3}$ de 10 décimos es igual a *3 décimos*, y queda 1 décimo.

Por lo tanto, 0.3 es una primera aproximación de $\frac{1}{3}$, y, duplicando, 0.6 es una primera aproximación de $\frac{2}{3}$.

Para una mejor aproximación, repita el proceso dividiendo la unidad en centésimos o milésimos: _____

_____

Claro está, es más fácil hacer esta conversión recurriendo al significado de la fracción como división. Pero esto puede esperar un poco.

Actividad 5

Nuestros materiales de trabajo

En esta actividad se analiza la presencia, casi siempre implícita, del significado de la fracción como división de enteros en los libros de texto de matemáticas.

Material:

- Libro de texto. Matemáticas. (L. T. M.) 5° y 6° y grado.
- Audio *Las fracciones*. Matemáticas 5. Serie El conocimiento en la escuela. Programa de actualización del maestro, SEP.

1. Resuelva el ejercicio de la página 125 del L. T. M. 5°, y después conteste las siguientes preguntas.

En esa página se recurre al significado de la fracción como división de enteros. Proporcione un ejemplo:_____

_____

En esa página aparece también otra manera de abordar la equivalencia entre dos fracciones (entre $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2}$).

¿En qué consiste esa manera?_____

_____

¿De qué otra manera, más sencilla para los alumnos, se podría saber que las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son equivalentes?_____

_____

En la actividad de comparar dos fracciones dividiendo el numerador entre el denominador, se usa implícitamente la idea de fracción como cociente. Se puede decir, sin embargo, que se está empleando una herramienta demasiado compleja para una tarea que no la requiere.

2. En la lección "Los tapetes de doña Hortensia", pág. 119 del L. T. M. 6°, hay otra actividad en la que se utiliza también la fracción como cociente.

¿En qué consiste esa actividad? _____

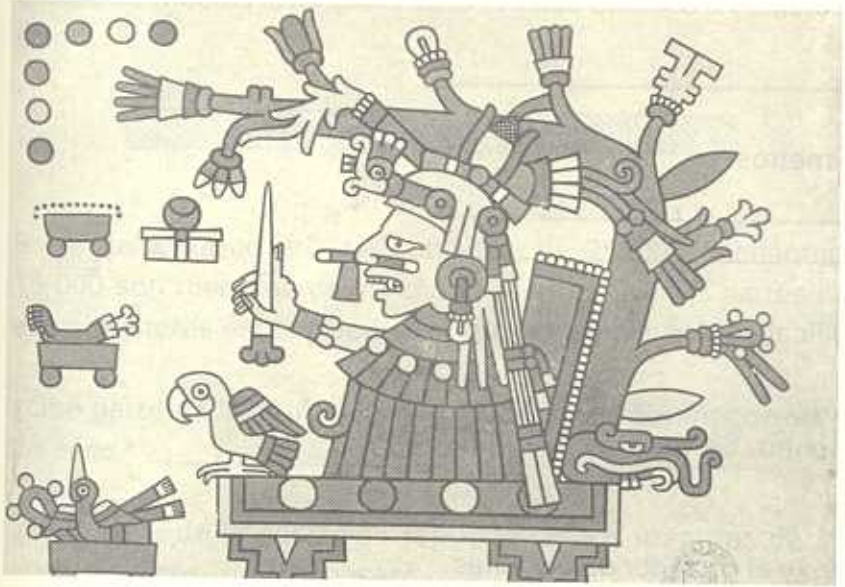
_____

_____

Los estudios en didáctica de las matemáticas aún no han encontrado caminos suficientemente viables para introducir el significado de las fracciones como división de enteros en el nivel básico. No obstante, debido a su importancia para el nivel medio básico, el significado de la fracción como cociente, se puede empezar a trabajar con los alumnos a partir de experiencias didácticas como las que aquí se han visto, cuando los alumnos tengan ya cierto dominio sobre el significado de la fracción como "partes de unidades" en situaciones de medición, y también sobre la división. El momento adecuado puede ser a fines de sexto grado de primaria o incluso en secundaria.

Sin embargo, como ya se vio, desde tercer grado se pueden plantear interesantes situaciones de reparto, y en cuarto grado se puede introducir la notación decimal ***sin necesidad*** *de recurrir al significado de la fracción como cociente.*

3. Para ampliar la información sobre la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria, se le sugiere escuchar el audio *Las fracciones* de la serie El conocimiento en la escuela. Matemáticas 5.



¿Qué hemos aprendido en este capítulo?

1. Para enseñar la noción de fracción en la escuela primaria es necesario ubicarla en los contextos en los que funciona, en los que resuelve problemas específicos. Se ha visto que, dependiendo del contexto y del tipo de problema, la fracción asume distintos significados, entre los que están: la fracción como partes de unidades, la fracción como operador multiplicativo y la fracción como división de enteros.

Indique cuál de estos significados está implicado en cada una de las siguientes situaciones:

a) El tornillo mide $\frac{3}{8}$ de pulgada:

_____

b) La producción de este año fue 0.5 veces mayor que la del año pasado: _____

c) Si al dar **a** pasos se avanzan **b** metros, en cada paso se avanza en promedio, $\frac{b}{a}$ metros: _____

_____

d) Más de tres cuartos de la población mayor de edad sabe leer y escribir. _____

e) La velocidad promedio de un vehículo que avanza una distancia **d** en un tiempo **t** es $\frac{d}{t}$:

_____

f) $\frac{2}{5}$ de 10 metros equivale a 4 metros:

_____

_____

2. Ordene, de menor a mayor dificultad, los siguientes problemas:

Un corredor da vueltas en un circuito. Se trata de averiguar qué distancia recorre, si:

a) El circuito mide $\frac{8}{10}$ de kilómetro y el corredor da 6 vueltas.

b) El circuito mide 6 kilómetros y el corredor da $\frac{8}{10}$ de vuelta.

c) El circuito mide 63 kilómetros y el corredor da 4 vueltas.

Orden de dificultad: _____

3. Subraye las parejas de fracciones que puede comparar sin necesidad de obtener fracciones equivalentes:

$\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{5}$ $\quad$ $\frac{3}{7}$ y $\frac{3}{9}$ $\quad$ $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{4}$ $\quad$ $\frac{4}{7}$ y $\frac{5}{9}$

4. ¿Existe una fracción que esté entre $\frac{87}{100}$ y $\frac{88}{100}$?

En caso de que su respuesta sea afirmativa, escriba la fracción:

_____

5. Ubique las siguientes fracciones entre los números que están escritos abajo.

0.6, 1.099, 0.625, 1.99, $\frac{625}{100}$, $\frac{2}{3}$

0 ___ 0.62 ___ 0.63 ___ $\frac{3}{4}$ ___ 1.1 ___ 2 ___

6. Si se reparten 5 barritas de chocolate entre 4 niños, en partes iguales y sin que sobre nada, ¿qué fracción de barrita le toca a cada niño?

7. Trace una línea que mida 1.25 unidades, tomando como unidad de medida la longitud de la tira que aparece a continuación:

8. Se calcula que en una población de 25 000 habitantes, 15 000 son menores de 18 años y las tres cuartas partes de estos menores están inscritos en alguna escuela.

¿Qué parte de la población está constituida por menores de 18 años? _____

¿Qué parte de la población representan los menores de 18 años inscritos en la escuela? _____

El perímetro de un triángulo es de 30 centímetros. ¿Cuál puede ser el valor de la base si: a) es escaleno; b) es isósceles; c) es equilátero? (Considerar valores enteros)

9. Las medidas de los lados de un dibujo son las siguientes: **a** = 6 cm, **b** = 10 cm, **c** = 12 cm, **d** = 15 cm

Al hacer una reprodución ampliada del dibujo, se obtuvieron las siguientes medidas: **a** = 9 cm, **b** = 15 cm

Calcule las medidas que faltan: **c** = _____ , **d** = _____

10. De una viga de dos metros de longitud, se cortaron 15 pedazos iguales. ¿Qué fracción de metro mide cada pedazo?

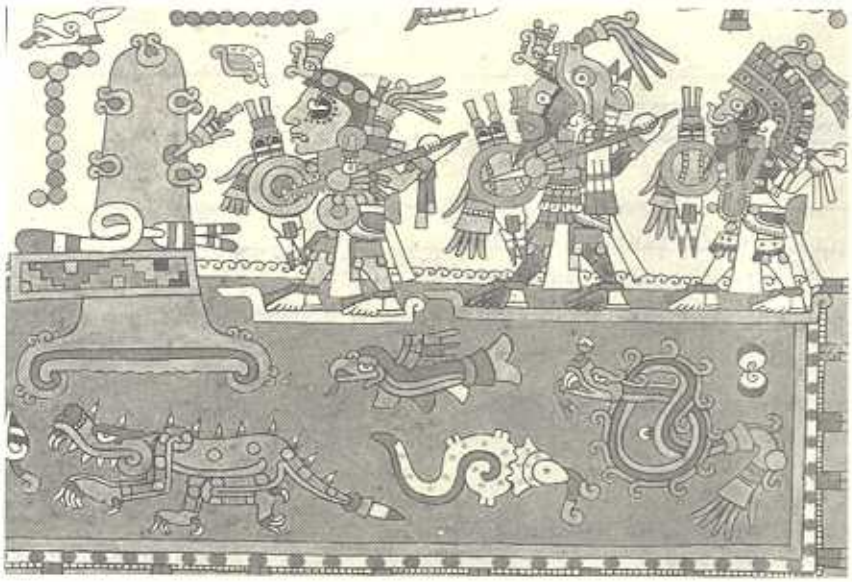
_____

11. A continuación se da una lista de contenidos del tema de fracciones. Escriba a la derecha de cada uno el número 1, 2 ó 3 para indicar si el contenido es adecuado para el primer ciclo de la educación primaria (primero y segundo grado), para el segundo ciclo (tercero y cuarto grado), o para el tercer ciclo (quinto y sexto grado). Anote una cruz (X) si considera que el contenido no es adecuado para el nivel de primaria.

Si considera que un contenido puede verse en más de un ciclo, ponga los números correspondientes.

a) Repartos equitativos y exhaustivos con magnitudes continuas (longitudes, superficies), sin cuantificar el resultado.

_____



b) Las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ en contextos de reparto y medición. _____

_____

c) Repartos entre 3 ó 5, cuantificando el resultado con una suma de fracciones. _____

d) Algoritmo para la división de fracciones. _____

e) La fracción $\frac{a}{b}$ como el resultado de la división a ÷ b en contextos de reparto. _____

_____

f) Introducción a la multiplicación de fracciones a partir de situaciones como $\frac{3}{4}$ *de* 60 metros, $4\frac{2}{3}$ veces, $\frac{1}{2}$ *de* $\frac{3}{4}$, etcétera.

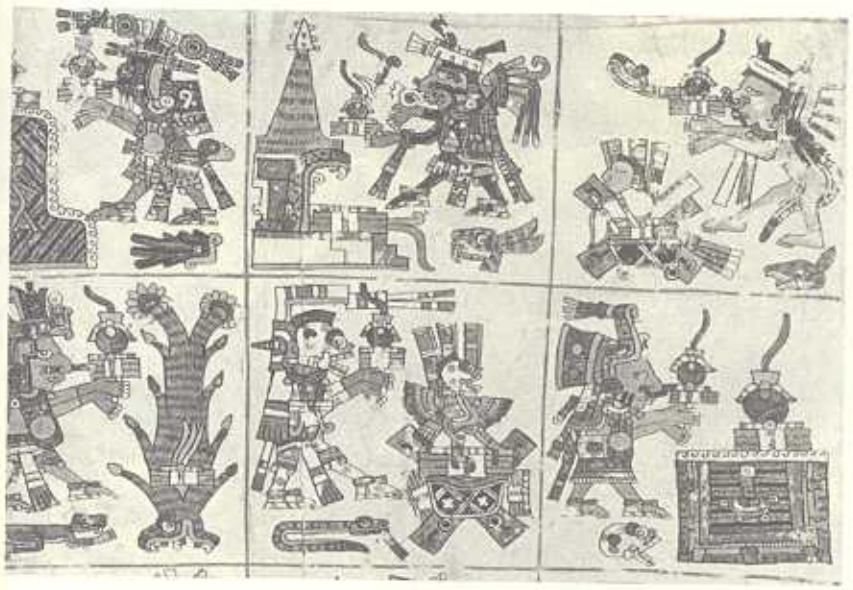
_____

g) La equivalencia de fracciones a nivel concreto (a partir de material concreto o de dibujos). _____

h) Regla para obtener fracciones equivalentes. _____

i) Casos simples de comparación de fracciones en contextos de medición (por ejemplo, fracciones con el mismo numerador o denominador). _____

j) Suma y resta de fracciones con distinto denominador. _____



Mario Gómez Casas

II

Procesos de cambio

En numerosas situaciones de la vida cotidiana y de las ciencias se dan situaciones en las que una magnitud varía en función de otra. En este capítulo se analizan algunas de estas situaciones, y en particular las de variación proporcional. Asimismo, se propicia la reflexión sobre los procesos didácticos que pueden favorecer la apropiación por los alumnos de esta importante noción.

Tema 1
Variación proporcional y no proporcional

En este tema se trabajará sobre la idea de la variación de una cantidad con respecto a otra. Hay muchas maneras en que una cantidad puede depender de otra. No sólo es importante saber aplicar la noción de variación proporcional a la resolución de problemas, sino que, además, es necesario saber diferenciarla de otras variaciones.

Actividad 1

Los engranes y las vueltas

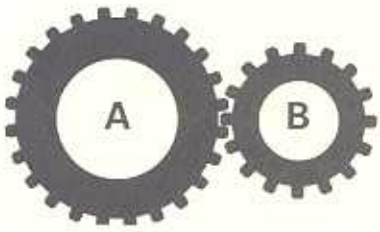
El propósito de esta actividad es analizar situaciones de variación proporcional y no proporcional, representarlas gráficamente y encontrar algunos procedimientos y recursos para resolver los problemas de proporcionalidad directa.

Material:

- Libro para el Maestro. Matemáticas. Sexto grado (L.M.6°).

1. Resuelva y compare las siguientes cuatro situaciones.

a) Cada vez que la rueda **A** da dos vueltas, la rueda **B** da tres vueltas.



Complete los datos que faltan en la tabla.

Tabla 1

Número de vueltas de la rueda A	0	2		6		10		16
Número de vueltas de la rueda B		3	6		12		18	

b) Juan tomó un taxi, se puso a platicar con el taxista y le preguntó cómo funcionaba el taxímetro. El taxista le dio la

siguiente explicación: *"Cuando sube un pasajero, enciendo el taxímetro, el cual marca $2.00 por el banderazo y $ 0.50 cada 500 metros"*

Complete los datos que faltan en la tabla.

Tabla 2

Precio en pesos	Distancia recorrida en metros
2	0
2.50	500
3	
	4 000
	6 000
10	
12	
16	

En la tabla anterior, si la cantidad de kilómetros aumenta al doble, por ejemplo de 500 m a 1 000 m, el costo del viaje no aumenta al doble: pasa de 2.50 a 3 pesos. Esto se debe a que en el costo va incluida la tarifa fija del "banderazo".

c) Esta tabla indica el peso en kilogramos de un niño, desde su primer año de vida hasta el séptimo. ¿Cuánto pesará el niño cuando tenga 14 años?

Tabla 3

Edad en años	1	2	3	4	5	6	7	8	9	14
Peso en kg	6	12	15	17	19	19	20			

d) A la hermana de Pedro le pidieron en la escuela que completara la siguiente tabla, en la cual se indica la masa en gramos de distintos volúmenes de aceite comestible.

Complete los datos que faltan en la tabla:

Tabla 4

Masa en gramos	1.6				8	9.6	
Volumen en cm^3	2	3	5	7			15

La densidad es la cantidad de masa por unidad de volumen. ¿Cuál es la densidad del aceite? _____

e) Conteste las siguientes preguntas:

Para cada una de las situaciones anteriores, ¿se puede predecir lo que sucederá con cantidades diferentes a las que se proporcionan en cada caso? _____

Si bien en las cuatro situaciones presentadas las magnitudes varían, no todas lo hacen de manera proporcional. ¿En cuál de las situaciones las magnitudes varían de manera proporcional?

_____

_____

¿Por qué es más fácil completar la tabla de los engranes que la de la densidad? _____

_____

2. Diga cuáles de las tablas cumplen con las siguientes propiedades:

a) Cuando crece una de las magnitudes, crece la otra. Por ejemplo, si crece el número de vueltas de la rueda **A**, crece el número de vueltas de la rueda **B**.

_____

b) Cuando una magnitud crece el doble, el triple, etc., la otra también.

_____

c) En la tabla 1, a la suma de valores de una magnitud le corresponde la suma de valores de la otra magnitud: por ejemplo, para calcular el número de vueltas que da la rueda **B** cuando la rueda **A** da 8 vueltas se pueden sumar los números 3 y 9 que corresponden a 2 y 6.

Número de vueltas de la rueda A	Número de vueltas de la rueda B
2	3
6	9
8	12

¿En qué otras tablas sucede lo mismo? _____

_____

_____

d) A diferencias iguales en una magnitud, corresponden diferencias iguales en la otra magnitud. Por ejemplo, en la tabla 1:

	A	B	
diferencia de 1	2	3	**diferencia de 1.5**
	3	4.5	
diferencia de 1	6	9	**diferencia de 1.5**
	7	10.5	

¿En qué otras tablas sucede lo mismo? _____

e) Escoja una columna de la tabla 1. Divida el número de vueltas de la rueda **B** entre el número de vueltas de la rueda **A.** ¿Cuánto obtiene? ¿Qué representa esa cantidad?

_____

- Si hace lo mismo con los datos de las siguientes columnas, ¿piensa que se debe obtener un número mayor, menor o igual? Compruébelo.

¿Sucede lo mismo en las otras tablas? _____

Imagine que existieran unos animalitos que doblaran su número cada minuto. Si hay la mitad de un vaso lleno de esos animalitos en el minuto 19, ¿en qué minuto estará el vaso completamente lleno?

3. Sintetice la información que obtuvo en el punto anterior poniendo una X en el espacio correspondiente de la siguiente tabla:

	Tabla1	Tabla 2	Tabla 3	Tabla 4
Cuando crece una de las magnitudes, crece la otra.				
Cuando una magnitud crece el doble, el triple, etc., la otra también.				
A la suma de valores de una magnitud, le corresponde la suma de valores de la otra magnitud.				
A diferencias iguales en una magnitud, corresponden diferencias iguales en la otra magnitud.				
El cociente entre las cantidades de un mismo renglón es siempre el mismo				

- Para comprobar si sus respuestas fueron correctas lea el apartado "Procesos de cambio" del L. M. 6° grado (págs. 57 a 65).

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando, al aumentar una cantidad, la otra aumenta en la misma proporción.

También se puede decir que dos magnitudes son directamente proporcionales si el cociente entre dos cantidades correspondientes es siempre constante. Así, de los cuatro ejemplos vistos, son magnitudes directamente proporcionales las del problema de los engranes y de la densidad del aceite. Por ejemplo, en la tabla 1, el cociente del número de vueltas de la rueda **B** *entre el número de vueltas de la rueda* **A**, *siempre es igual a 1.5. Esta cantidad se llama* ***constante de proporcionalidad***, *y en este caso representa el número de vueltas de la rueda* **B** *por una vuelta de la rueda* **A**.

Hay situaciones de variación proporcional, como la de los engranes, en las que es más fácil obtener los datos que faltan en una tabla a partir de calcular dobles, triples, mitades, cuartos, décimos, etc., o de sumar dos o más cantidades. La utilización de estos procedimientos, además de ser sencilla, permite a los niños comprender mejor la variación proporcional y sus propiedades.

En la tabla de la densidad del aceite, para calcular la masa que le corresponde a un volumen de 3 cm^3 , es necesario calcular la masa para una unidad de volumen (valor unitario). Este razonamiento no es tan intuitivo como el anterior, pero sirve para resolver algunas situaciones en donde calcular dobles, triples, mitades, etc., no permite obtener los datos que faltan.

Las magnitudes de la tabla 2, de la tarifa del taxi, aunque verifican la propiedad de las diferencias iguales, no son directamente proporcionales, porque al calcular el cociente de las dos cantidades de cada renglón no se obtiene siempre el mismo resultado.

Supongamos que tenemos dos vasos: Un vaso de agua y uno de vino. Tomamos una cucharada de agua del primer vaso y la echamos en el de vino, removiendo.
Tomamos a continuación una cucharada de mezcla y la echamos en el vaso de agua. ¿Hay más agua en el vaso de vino que vino en el vaso de agua? ¿o sucede al revés?

4. Elabore las siguientes gráficas y conteste las preguntas que se plantean después. Marque sobre los ejes la escala que necesite.

Gráfica 1

Número de vueltas de la rueda B (eje vertical)

Número de vueltas de la rueda A (eje horizontal)

Gráfica 2

Tarifa en pesos

Distancia en metros

Gráfica 3

Edad en años

Peso en Kg

Gráfica 4

Masa en gramos

Volumen en cm^3

a) Compare las cuatro gráficas. ¿Cuáles de ellas se pueden usar para conocer otros valores de las magnitudes? _____

_____

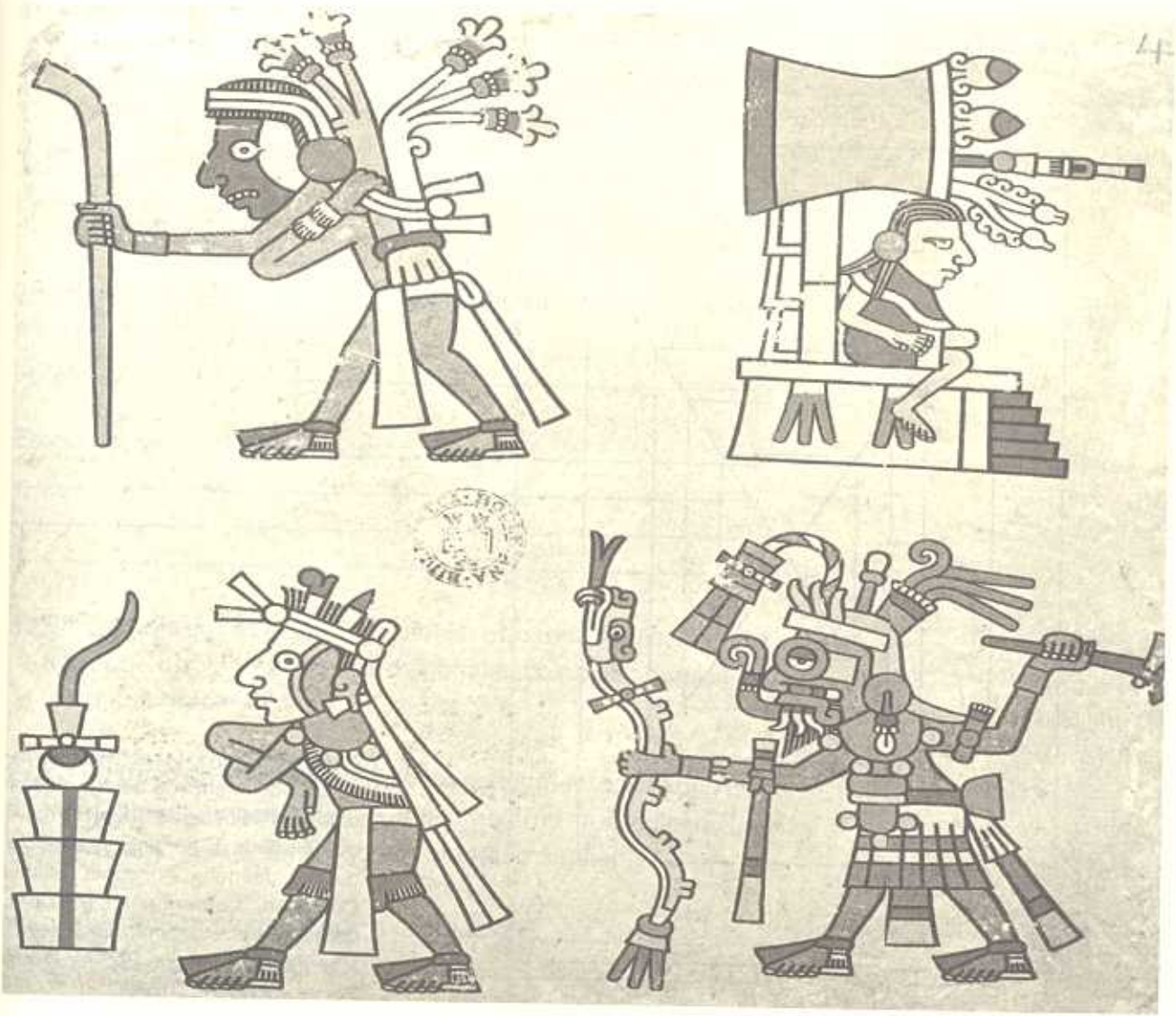
b) ¿En qué gráficas los puntos señalados están en una línea recta? _____

c) De las líneas rectas graficadas, ¿cuáles pasan por el origen (punto de coordenadas (0,0))? _____

_____

d) ¿Qué características tienen las dos gráficas que son de proporcionalidad directa? _____

_____



Actividad 2

Los rectángulos[2]

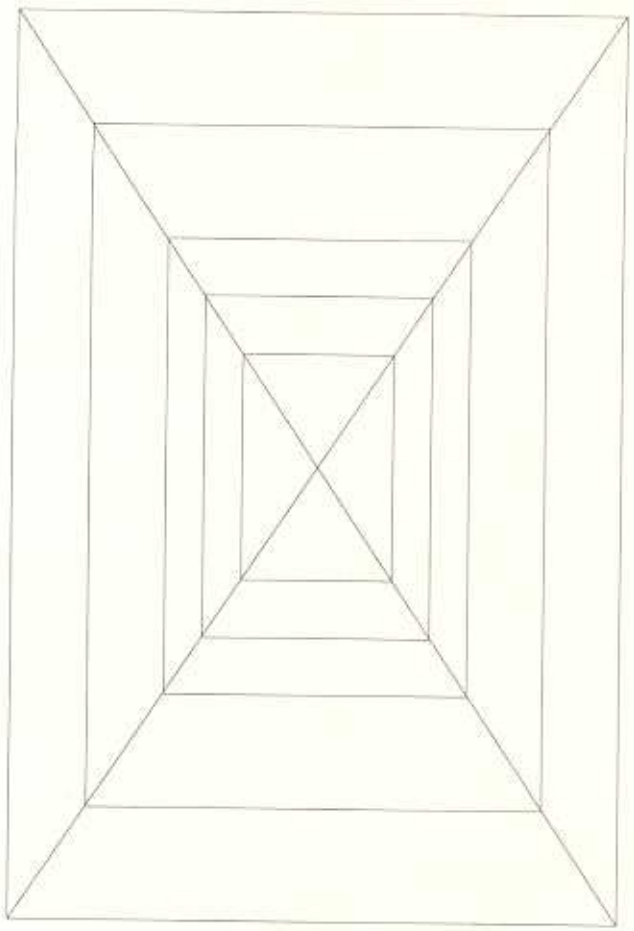
En esta actividad analizará una situación problemática de razonamiento proporcional y conocerá tanto sus posibilidades didácticas como su complejidad conceptual, al confrontar distintas estrategias de resolución.

1. Procure resolver el siguiente problema con un compañero. Si lo consideran necesario, construyan los rectángulos en cartoncillo. Anoten en la misma hoja todas las operaciones que realicen, y después de resolverlo comparen los procedimientos utilizados.

Material:

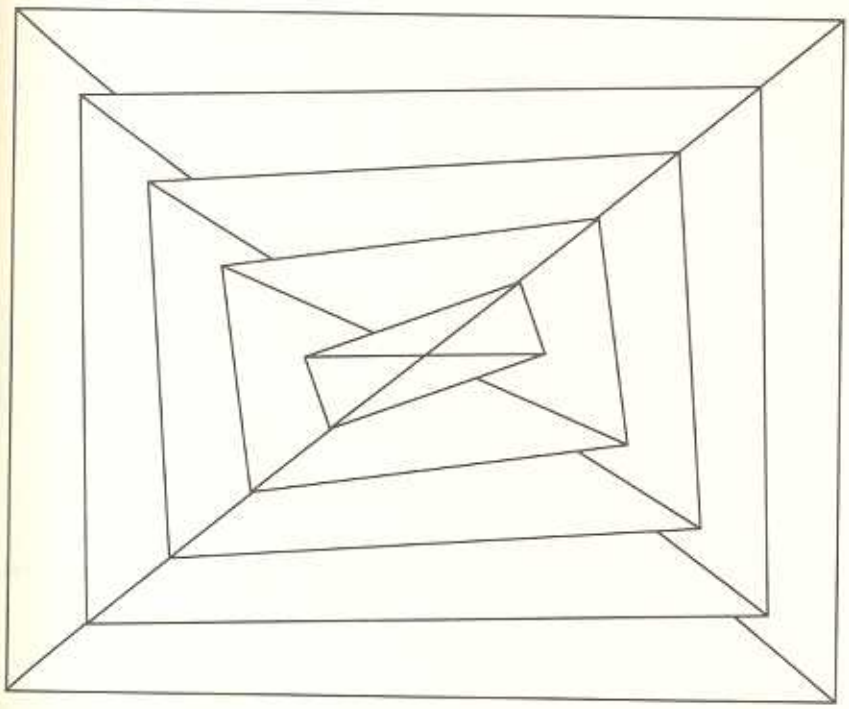
- Cartoncillo.
- Regla y tijeras.

Juan y María se pusieron a recortar rectángulos de cartoncillo. Juan descubrió que si superponía sus rectángulos como muestra la siguiente figura, las diagonales coincidían.



[2] Adapatación de una actividad tomada del Documento de trabajo presentado en el Coloquio de Guéret en mayo de 1985. Este documento fue redactado por Jacques Aucagne, Michel Courriere, Catherine Houdement, Catherine Leclerc, Gerard Lipp, Marie-Lise Peltier, Monique Pezard, Nicole Porcel y Jacques Thiollet.

María quiso hacer lo mismo, pero sus rectángulos le quedaron así:



¿Por qué a los rectángulos de María no les sucede lo mismo que a los de Juan?

_____

Escriba sus reflexiones:_____

_____

_____

_____

- En una hoja de papel, trate de dibujar otro rectángulo, distinto a los que hizo Juan, y cuyas diagonales coincidan con las de los rectángulos de Juan.

2. A continuación se presentan dos procedimientos usados por diferentes personas para resolver el problema anterior. Analice cada procedimiento, teniendo en cuenta lo siguiente:

- ¿Cada persona logró llegar a la solución?_____

_____

- Si no llegó, ¿en dónde estuvo la dificultad: en la comprensión del problema, en las mediciones?

  _____

  _____

- Explique con sus palabras los razonamientos realizados en cada procedimiento.

  _____

  _____

- Compare el procedimiento que usted utilizó para resolver el problema con los procedimientos 1 y 2. ¿Encuentra similitud en el razonamiento que hizo usted con algunos de éstos?_____

  _____

Procedimiento 1

Porque los rectángulos de Juan mantiene una relación en sus lados, que resultan proporcionales

$$3 \div 2 = 1.5$$
$$4.5 \div 3 = 1.5$$
$$6 \div 4 = 1.5$$

Las medidas de los rectángulos de María, no guardan una relación proporcional

$$3 \div 5 = 0.6$$
$$5 \div 7 = 0.71$$

Procedimiento 2

Los rectángulos de Juan crecen en la misma proporción

Juan		*María*	
2 x 3	*Mientras el ancho aumenta 1,*	*3 x 1*	*El largo va en desorden,*
3 x 4.5	*el largo, aumenta 1.5*	*5 x 3*	*sin proporción*
4 x 6	*Además, si un lado crece*	*7 x 5*	*con respecto al ancho*
6 x 9	*el doble, el otro también*	*11x 9*	
8 x 12			

1° Intuitivamente vi la desproporción en las de Juan
2° Luego trate de establecer una relación entre cada juego de rectángulos, en lo que se refiere al ancho y al largo

3° Por último, hice una prueba recortando dos rectángulos intermedios con la proporción 1 x 1.5. Las medidas de éstos son 5 x 7.5 y 7 x 10.5

3. Escriba en su cuaderno un análisis de la actividad, considerando las siguientes preguntas:

¿Cuál es el propósito de esta actividad?

¿Qué conceptos se trabajan?

¿A qué conclusiones se llega?

¿Qué dificultades tuvo para resolverla?

¿Qué conocimientos previos se necesitan para resolver la actividad?

¿Considera que se necesita saber la regla de tres para resolver el problema?

Este problema puede ser planteado a alumnos de 5° ó 6° grado. Incluso puede ser un buen problema para iniciar el trabajo sobre la proporcionalidad. A partir de la manipulación del material y el trabajo en grupo se favorece el intercambio de ideas entre los integrantes del mismo, así como el análisis de los procedimientos que utilizan.

El objetivo es que el alumno utilice material geométrico sencillo y que, a partir de él y de las ideas que el propio niño ya posee a nivel intuitivo, pueda ir concretando, ampliando y enriqueciendo su lenguaje matemático.

3° Por último, hice una prueba recortando dos rectángulos intermedios con la proporción 1 x 1.5. Las medidas de éstos son 5 x 7.5 y 7 x 10.5

3. Escriba en su cuaderno un análisis de la actividad, considerando las siguientes preguntas:

¿Cuál es el propósito de esta actividad?

¿Qué conceptos se trabajan?

¿A qué conclusiones se llega?

¿Qué dificultades tuvo para resolverla?

¿Qué conocimientos previos se necesitan para resolver la actividad?

¿Considera que se necesita saber la regla de tres para resolver el problema?

Este problema puede ser planteado a alumnos de 5° ó 6° grado. Incluso puede ser un buen problema para iniciar el trabajo sobre la proporcionalidad. A partir de la manipulación del material y el trabajo en grupo se favorece el intercambio de ideas entre los integrantes del mismo, así como el análisis de los procedimientos que utilizan.

El objetivo es que el alumno utilice material geométrico sencillo y que, a partir de él y de las ideas que el propio niño ya posee a nivel intuitivo, pueda ir concretando, ampliando y enriqueciendo su lenguaje matemático.

Actividad 3

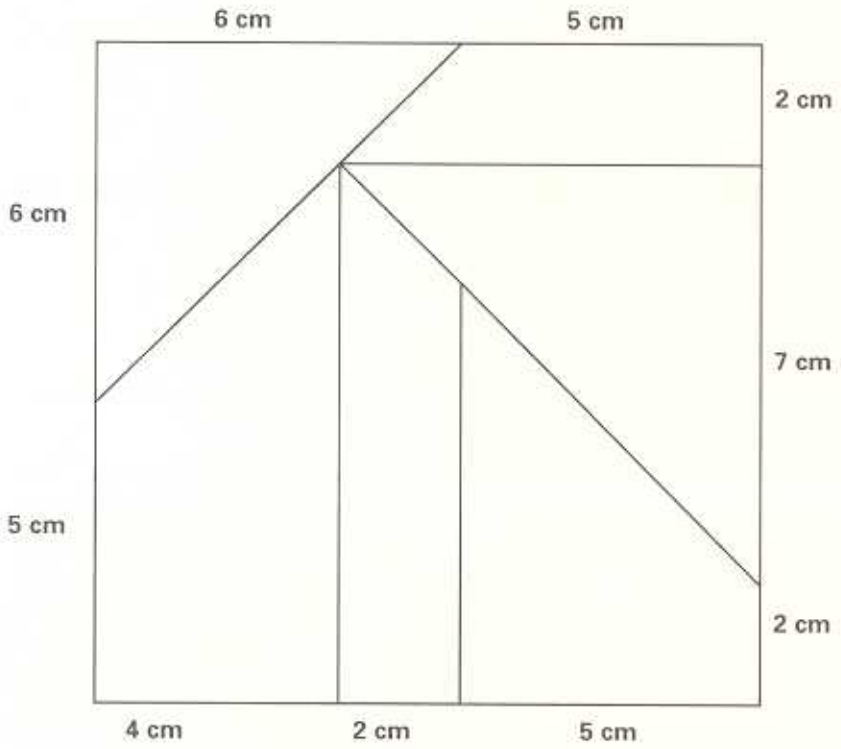
Se hacen grandes, se hacen chiquitos[3]

En la resolución de los problemas planteados en la presente actividad confrontará el razonamiento proporcional con el aditivo, al comparar varias estrategias de resolución.

1. Si le es posible, resuelva con un compañero el siguiente problema:

El dibujo que aparece a continuación es un rompecabezas. Cópielo con las medidas que se indican y recorte las piezas. El problema consiste en hacer las piezas de un rompecabezas semejante, pero más grande, de tal manera que la parte que mide 4 en el rompecabezas original, mida 11 en el rompecabezas que va a construir.

Construya cada pieza del rompecabezas grande. Cuando termine, ármelo para verificar si hizo las partes del tamaño correcto.



¿Logró usted construir el rompecabezas? Explique brevemente los pasos que siguió hasta llegar a construirlo._____

_____

_____

Material:

- Tijeras.
- Regla graduada.
- Tres hojas tamaño carta.
- *Lecturas.*

[3] Adapatación de una actividad tomada de: Nadine et Guy Brousseau. Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatorie - comptes rendus d' observations de situations et de processus didactiques à l'école Jules Michelet de Talence. Document pour les enseignants et pour les formateurs. I.R.E.M De Bordeaux, Francia, 1987.

¿Pudo usted comprobar de alguna manera si se equivocó o no? Explique cómo hizo para comprobar que el rompecabezas que construyó estuviese correcto. _____

_____

_____

Si no logró construir el rompecabezas continue de todas maneras. En el punto 3 encontrara información acerca de cómo se puede construir.

Este problema posee la cualidad de que uno mismo puede comprobar si la solución fue correcta o no, sin necesidad de que una tercera persona valide o invalide su resolución.

2. Ahora reproduzca otros dos rompecabezas semejantes al original. En el primero, la parte que mide 4 en el rompecabezas original debe medir 8 en el rompecabezas reproducido. En el segundo, la parte que mide 4 en el rompecabezas original debe medir 2 en el rompecabezas reproducido.

- Los problemas del punto 2 son mucho más sencillos que el problema 1. ¿Qué hace la diferencia? _____

  _____

  _____

3. Lea el artículo ¿Qué significa multiplicar por $\frac{7}{4}$? *(Lecturas* pág. 177 a 191) y conteste las siguientes preguntas:

¿En qué se parecen los procedimientos que se presentan en el artículo con la manera en que usted resolvió los problemas?

_____

_____

_____

¿Cuál procedimiento le pareció más sencillo? ¿Por qué? _____

_____

_____

En el artículo que leyó, ¿qué procedimiento esperaba el maestro que los alumnos aplicaran al resolver el problema? _____

_____

_____

Intente resolver los problemas anteriores aplicando el operador multiplicativo.

¿Cree que sus alumnos aplicarían, desde un principio, el operador multiplicativo al resolver este problema? ¿Por qué?

_____

¿Qué se perdería si se exigiera a los alumnos un procedimiento único para resolver el problema? _____

_____

Actividad 4

Distintos razonamientos frente a un mismo problema

En esta actividad analizará diferentes niveles de razonamiento que algunos niños realizan al resolver un problema de proporcionalidad.

1. a) Complete la siguiente tabla imaginándose cómo lo haría un niño de 7 años.

Número de cuadernos comprados	Precio pagado
1	
2	
3	12
4	
5	20
6	
8	
10	

¿Qué procedimientos usarán? _____

_____

¿En qué es probable que se equivoquen? _____

b) En la tabla que sigue se muestran algunas respuestas que niños parisinos de 7 a 9 años dieron al problema del precio de los cuadernos. Los datos fueron tomados de una investigación realizada en Francia por Graciela Rico en 1982, sobre la noción de proporcionalidad.[4]

[4] Citado en: Gálvez, Grecia y S. Navarro. Proporcionémonos instrumentos para el trabajo en el aula. Material de referencia para un curso de actualización para docentes de matemáticas: resolución de problemas y uso de calculadora de bolsillo en el aula (mimeo). UNESCO, Santiago de Chile, 1989.

Las edades, en años y meses, van entre paréntesis.

Número de cuadernos comprados	Cèline (7, 3)	Eric (7, 8)	Xavier (8, 9)	J. Paul (8, 1)	Emmanuel (7, 1)	Sandrine (7, 2)	Anne (9, 0)
1	3	10	9	3	4	4	4
2	8	11	10	6	8	8	8
3	12	12	12	12	12	12	12
4	13	13	16	12	16	16	16
5	20	20	20	20	20	20	20
6	32	21	26	18	24	24	24
8	38	22	34	24	32	28	28
10	100	23	44	30	36	32	32

Imagine algún razonamiento que pudieron haber hecho Sandrine y Xavier al dar estas respuestas, y escríbalos en su cuaderno.

c) Estas fueron algunas de las explicaciones que dieron los niños:

Cèline (7, 3): *Un cuaderno costará 3 F.* (¿Cómo lo sabes?) *Porque un cuaderno no es mucho, comparado con los otros. 2 cuadernos costarán 8 F.; 1 es más chico que 2. Cuatro cuadernos, un poco más caro que 3 cuadernos. Pongamos 13. Seis cuadernos, 32 F.* (¿Cómo supiste?) *Yo digo así, al azar. Ocho cuadernos, todavía más caro... 38 F. Diez cuadernos, costarán 100 F., porque 10 son más caros que 8.*

Eric (7, 8): *4 cuadernos costarán 13 F.* (¿Cómo lo sabes?) *Yo sé que 4 cuadernos son más caros que 3 cuadernos. 6 cuadernos costarán 21 F. 20 + 1, porque es lo que sigue. 8 cuadernos... 22 F. Diez cuadernos... Todavía más caro!... 23 F. Ahora, un cuaderno cuesta 10 F. y 2 cuadernos 11 F., porque 2 son más caros que 1.*

Xavier (8, 9): *...por 4 cuadernos pagará 16 F.* (¿Cómo supiste?) *A los 12 F. les agrego los 4 cuadernos. 6 cuadernos costarán 26 F. A los 20 F. que costaban 5, les agrego 6. Ocho cuadernos... 34 F. Hago 26 + 8. Diez cuadernos... 44 F. 34 + 10 = 44. Ahora hago 2 cuadernos. Entonces, 12 - 2 = 10 F. Un cuaderno cuesta 9 F.: 10 - 1 = 9.*

J. Paul (8, 1): *Un cuaderno cuesta 3 F.* (¿Cómo lo sabes?) *Porque veo que 3 cuestan 12, entonces un cuaderno cuesta 3.* Nota: A pesar de que respeta la proporcionalidad, el error en la determinación del precio unitario lleva a este niño a no respetar el orden estrictamente creciente.

Emmanuel (7, 1): *4 cuadernos cuestan 16 F.* (¿Cómo supiste?) *Porque hay 4 F de diferencia entre 12 y 16 y entre 20 y 16. Seis cuadernos... 24 F. Sumo 4. Ocho costarán 28 F. ¡Ah no!, falta el siete. 7 = 28 F. Ocho cuadernos... 32 F. Diez cuadernos... 36 F.* (¿Cómo lo sabes?) *Sumo 4.*

Sandrine (7, 2): *¿Cuánto cuesta un cuaderno?* (¿No puedes calcular cuánto cuesta un cuaderno? Sabes que 3 valen 12 F.) *Supongamos que un cuaderno cuesta 1F, 1 + 1 + 1 no resulta. Pongamos 3: 3 + 3 + 3, ¡tampoco resulta! Pongamos 4: 4 + 4 + 4, son 12, ¡ahí está! Ahora funciona: un cuaderno cuesta 4 F.*

Anne (9, 0): *Como veo que 3 veces 4 son 12, y 5 veces 4 son 20, 4 cuadernos es igual a 4 x 4.* (¿Qué es 4?) *Es el número que multiplica las cifras, es el precio de un cuaderno.*

La torre Eiffel que mide 300 metros de altura, está hecha toda de hierro y pesa 8 000 toneladas. Supongamos que reproducimos la torre. Si queremos hacer un modelo también de hierro que pese en total 1 kg, ¿qué altura debe tener? ¿será más alta o más baja que una caja de arroz?

¿Cuáles de los razonamientos anteriores son correctos?_____

_____

¿Cuáles llevan a la solución del problema?_____

_____

_____

Explique en su cuaderno en qué consiste cada razonamiento.

Con respecto a los razonamientos que hicieron los niños, Cèline sólo respeta el orden creciente de las magnitudes; Eric aplica el operador + 1 al precio de los cuadernos, Xavier usa una regla aditiva con crecimiento variable. Estos tres niños no respetan la proporcionalidad. En cuanto a los restantes, si bien tienen un razonamiento proporcional, no todos lo aplican correctamente. Por ejemplo, J. Paul toma

un valor cualquiera como precio unitario, sin tener en cuenta que 3 cuadernos cuestan 12 F. Emmanuel, Sandrine y Anne sí tienen éxito en sus razonamientos. Emmanuel usa una regla aditiva con crecimiento constante, Sandrine busca el precio unitario a partir de un valor arbitrario, y Anne aplica el operador x 4 al número de cuadernos.

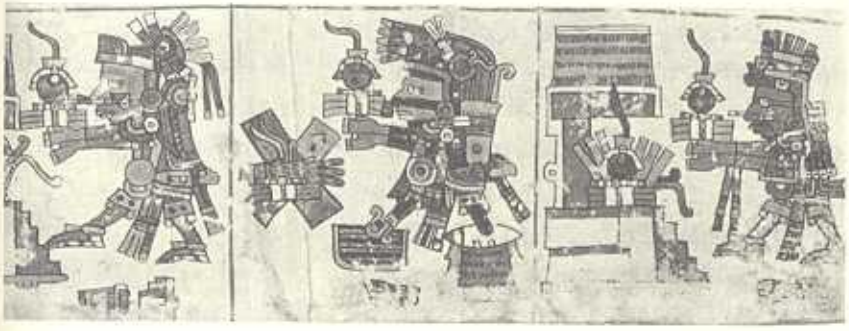
2. El texto que sigue[5] es un fragmento del registro de algunos razonamientos que diferentes niños hicieron al resolver un problema. Se tomó del reporte de una investigación sobre la noción de proporcionalidad realizada por G. Noelting. Lea el texto, resuelva el problema y conteste las preguntas que vienen después.

Vamos a jugar a hacer un jugo de naranja para una fiesta.

El maestro coloca cierto número de vasos de jugo de naranja, y cierto número de vasos de agua en cada una de las dos charolas. En cada charola, el jugo de naranja está a la izquierda del niño, y el agua a su derecha. La charola que está a su izquierda se llamará **A** y la de su derecha **B**.

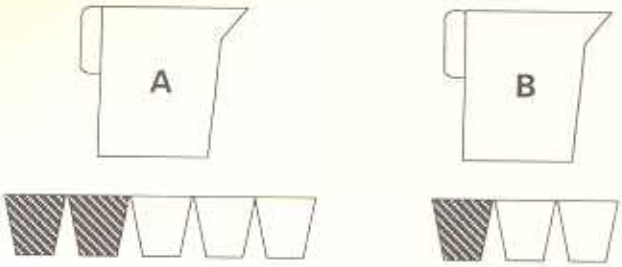
Aquí (**A**) la tia *Ana preparó estos 2 vasos de jugo de naranja y 3 de agua; aquí* (**B**) *la tía Beatriz preparó 1 vaso de jugo de naranja y 2 vasos de agua. Ahora haremos como si vaciáramos todos los vasos de la tía Ana en esta jarra y mezclamos bien. Lo mismo hacemos con los vasos de la tía Beatriz, haremos como si los vaciaramos en esta otra jarra.*

Ahorita, haremos como si probáramos un poco de este jugo (**A**) *y un poco de éste* (**B**). *Ahora pongan atención, ¿en qué lado creen ustedes que la bebida tendrá un sabor más fuerte a naranja? ¿o creen ustedes que ambas bebidas tendrán el mismo sabor?*



[5] Noelting, Gerald. "The development of proportional reasoning and the ratio concept." Part II. Problem - Solving strategies and mechanism of adaptive restructuring en Educational Studies in Mathematics II. p. 331 - 363. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holland, 1980.

Lo mismo que hicimos aquí está dibujado en el papel.



Si piensan que el sabor es más fuerte en **A**, *pongan una cruz. Si piensan que el sabor es el mismo en ambas jarras, pongan una cruz en medio de* **A** *y* **B**, *y si piensan que es más fuerte el sabor en* **B**, *pongan una cruz debajo de* **B**. *En las líneas que hay debajo del dibujo, escriban con sus propias palabras por qué escogieron esa respuesta.*

Si 3 gatos cazan 3 ratones en 3 minutos, ¿cuántos gatos serán necesarios para cazar 90 ratones en 90 minutos?

a) Escriba los posibles procedimientos y respuestas que podrían dar niños de 5° o 6° grado al resolver el problema.

b) Las respuestas que algunos niños dieron son éstas:

Luisa: *Saben igual porque en cada lado hay más agua que jugo.*

Cristina: *Tienen el mismo sabor porque en ambos hay un vaso de agua más que de jugo.*

Nicolás: **A** *sabe más a naranja porque en* **B** *hay un vaso de jugo por 2 vasos de agua, mientras que en* **A** *hay un vaso de jugo por* $1\frac{1}{2}$ *de agua, así que el sabor sabrá más fuerte mientras haya menos agua".*

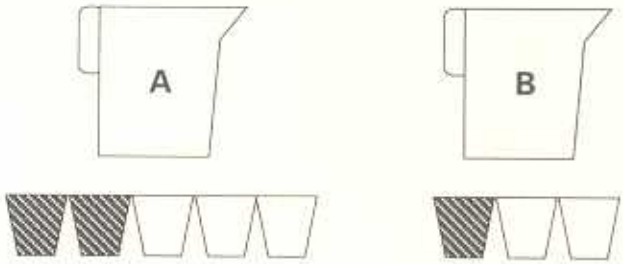
Silvia: *En* **A**, *porque hay* $\frac{2}{5}$ *de jugo por* $\frac{3}{5}$ *de agua, de otra forma* $\frac{6}{15}$ *de jugo y en la derecha* $\frac{1}{3}$ *ó* $\frac{5}{15}$ *de jugo. La cantidad es por lo tanto más fuerte en* **A** *que en* **B**.

¿Cuáles de los razonamientos anteriores llevan a la solución del problema?_____

_____

Explique en su cuaderno en qué consiste cada razonamiento.

Lo mismo que hicimos aquí está dibujado en el papel.



Si piensan que el sabor es más fuerte en **A**, *pongan una cruz. Si piensan que el sabor es el mismo en ambas jarras, pongan una cruz en medio de* **A** *y* **B**, *y si piensan que es más fuerte el sabor en* **B**, *pongan una cruz debajo de* **B**. *En las líneas que hay debajo del dibujo, escriban con sus propias palabras por qué escogieron esa respuesta.*

Si 3 gatos cazan 3 ratones en 3 minutos, ¿cuántos gatos serán necesarios para cazar 90 ratones en 90 minutos?

a) Escriba los posibles procedimientos y respuestas que podrían dar niños de 5° o 6° grado al resolver el problema.

b) Las respuestas que algunos niños dieron son éstas:

Luisa: *Saben igual porque en cada lado hay más agua que jugo.*

Cristina: *Tienen el mismo sabor porque en ambos hay un vaso de agua más que de jugo.*

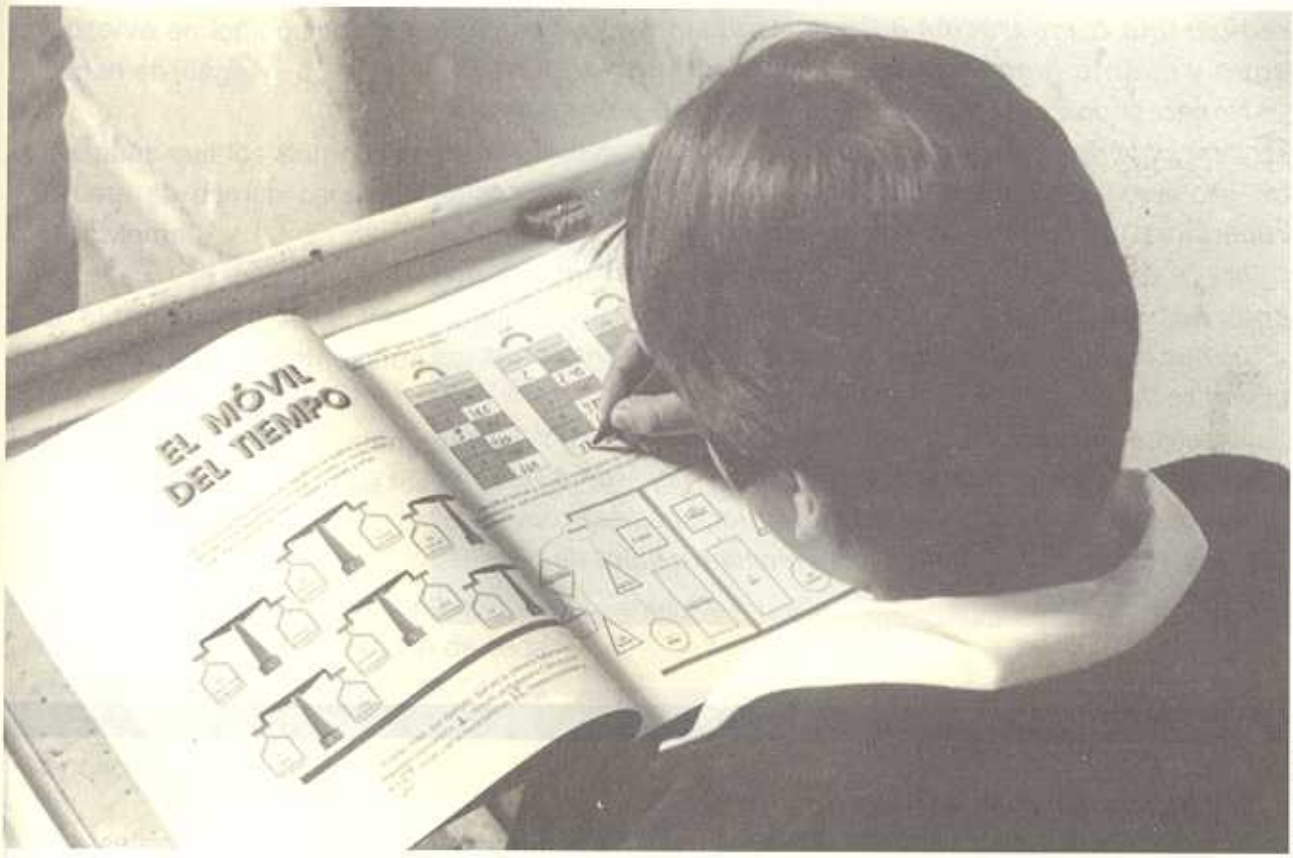
Nicolás: **A** *sabe más a naranja porque en* **B** *hay un vaso de jugo por 2 vasos de agua, mientras que en* **A** *hay un vaso de jugo por* $1\frac{1}{2}$ *de agua, así que el sabor sabrá más fuerte mientras haya menos agua".*

Silvia: *En* **A**, *porque hay* $\frac{2}{5}$ *de jugo por* $\frac{3}{5}$ *de agua, de otra forma* $\frac{6}{15}$ *de jugo y en la derecha* $\frac{1}{3}$ *ó* $\frac{5}{15}$ *de jugo. La cantidad es por lo tanto más fuerte en* **A** *que en* **B**.

¿Cuáles de los razonamientos anteriores llevan a la solución del problema?_____

_____

Explique en su cuaderno en qué consiste cada razonamiento.



Mara Gómez Casas

3. Escriba tres problemas, cambiando en cada caso las cantidades de agua y jugo, de manera que tengan diferente nivel de complejidad.

En el ejemplo anterior, las respuestas de los niños implican diferentes niveles de razonamiento; por ejemplo, Luisa compara de manera cualitativa, es decir, sin establecer una relación numérica entre el agua y el jugo de naranja. Cristina utiliza, en ambos casos, la diferencia del número de vasos de agua con el número de vasos de jugo. Nicolás calcula, en ambos casos, la cantidad de vasos de agua por cada vaso de jugo, es decir, calcula el valor de la razón unitaria y luego realiza una comparación entre ambas razones unitarias. Silvia calcula, en cada caso, la razón del jugo de naranja con respecto a la mezcla, y luego compara las razones resultantes.

*Los niños, dependiendo de su edad y del grado en que han desarrollado esta noción, también suelen dar respuestas como: "saben igual porque en la jarra **A** hay un vaso más de jugo que en la jarra **B**, pero también hay un vaso más de agua y se compensa". En este caso, el alumno*

*realiza una comparación aditiva, es decir, se fija cuánta agua y cuánto jugo más tiene la jarra **B** que la jarra **A**.*

No necesariamente todos los niños tienen que pasar por esta secuencia de razonamientos; puede suceder que un niño, ante un problema de proporcionalidad, haga una comparación cualitativa y, frente a otro problema de proporcionalidad, utilice la comparación multiplicativa al establecer una razón entre dos cantidades.

Lo que es importante saber es que el razonamiento proporcional se desarrolla a lo largo de varios años.

Resolver un problema como lo hicieron Nicolás y Silvia requiere de cierta madurez cognitiva y, por supuesto, de numerosas experiencias previas con situaciones de proporcionalidad. Estos razonamientos corresponden a niños de 13 y 14 años.

Actividad 5

Veamos lo que hacen los niños

El propósito de esta actividad es que el maestro conozca los procedimientos iniciales que alumnos de 5° o 6° grado ponen en juego frente a un problema de proporcionalidad, que implica el uso de operadores multiplicativos fraccionarios.

Material:
- *Lecturas.*

- Escoja una de las dos situaciones que se presentan a continuación para plantearla a alumnos de quinto o sexto grado de primaria.

Opción 1.

1. Organice la actividad 2, "Los rectángulos", para ponerla en práctica con alumnos de 5° o 6° grado.

Sugerencias de organización de la clase:

- Organice a los alumnos en equipos y entrégueles a cada uno los rectángulos de Juan y los de María. Plantee el problema de "Los rectángulos" con la pregunta: ¿Por qué a los rectángulos de María no les sucede lo mismo que a los de Juan?

- Dé tiempo suficiente a los alumnos para que manipulen el material y discutan acerca del problema. Cuando los alumnos crean tener una respuesta, pídales que construyan otro rectángulo que se pueda acomodar con los de Juan.

- Observe en los equipos los razonamientos que los alumnos ponen en juego.

- Después que los alumnos resuelvan el problema, realice una puesta en común para que cada equipo explique cómo lo resolvieron.

2. En el transcurso de la clase procure observar los aspectos que se indican a continuación:

- ¿Superpusieron los rectángulos para comparar su forma? ¿Se dieron cuenta de que los rectángulos de María no están a escala?

- ¿Midieron y trataron de encontrar una relación aditiva entre las medidas del largo y del ancho de cada rectángulo de María, por ejemplo, "como el ancho aumentó uno, hay que aumentar uno también al largo"?

- ¿Trataron de encontrar la relación multiplicativa entre las medidas del largo y del ancho de cada rectángulo de Juan, por ejemplo, "el largo debe ser siempre igual al ancho más la mitad del ancho"? ¿La encontraron?

- ¿En algún momento utilizaron expresiones indicadoras de que perciben la proporcionalidad de las medidas de los rectángulos de Juan, por ejemplo "deben crecer de la misma manera, parejito"?

- ¿Aparecieron procedimientos diferentes a los que aquí se mencionan? Escríbalos en su cuaderno y trate de comprender cuál fue la lógica de cada uno.

Mario Gómez Casas

Opción 2

1. Organice la actividad 2 "La escala" del tema 4, capítulo I, para plantearla a los alumnos de 5° o 6° grado.

Sugerencias de organización de la clase:

- Para planear la actividad anterior, es preferible que los alumnos hayan realizado previamente figuras a escala, al doble, al triple, a la mitad, a la tercera parte.

- Organice al grupo en equipos de 2 a 4 integrantes.

- Dibuje, en hojas separadas, las casitas **A** y **C** de la actividad 2 "La escala". Recuerde que las medidas de **C** son $\frac{3}{2}$ las de **A**.

- Dibuje una casita **A** para cada equipo, o si no es posible, pida a cada equipo que copie la casita **A** con las medidas indicadas.

- Muestre de lejos a los alumnos la casita **C** y explíqueles que es una copia ampliada de la casita **A**, es decir, tiene la misma forma pero es más grande.

- Proporcione a los alumnos una sola de las medidas de la casita **C**, por ejemplo, la medida del lado **b**.

- Pida a los alumnos que construyan la casita **C**. Cuando terminen y estén seguros de que su casita es correcta, la compararán con la casita **C** que usted dibujó, superponiéndolas y mirándolas a trasluz. Si coinciden, ¡ganaron!

- Posteriormente, puede organizar una puesta en común, en la que distintos equipos expliquen lo que hicieron.

2. En el transcurso de la clase intente identificar los distintos procedimientos que los niños ponen en juego. Compárelos con los que se analizan en el artículo "¿Qué significa multiplicar por $\frac{7}{4}$?" (*Lecturas*, págs. 177 a 191).

Si 10 excavadoras en 10 horas cavan 10 metros de zanja, ¿cuántas excavadoras serán necesarias para cavar en 100 horas, 100 metros de zanja?

*Dado que las medidas de la casita **B** son más grandes que las de **A**, pero no son ni el doble, ni el triple, ni ningún número entero de veces las de **A**, es probable que los alumnos se desconcierten. Surgirán distintas estrategias para superar el obstáculo: por ejemplo, es probable que varios equipos, al no encontrar un operador multiplicativo entero, opten por buscar la diferencia entre la medida de **b** en la figura original y en la figura ampliada. Luego, sumarán esa diferencia a las demás medidas obteniendo una casita deformada.*

Tema 2
El porcentaje.

A lo largo de las actividades de este tema, se ven diferentes aproximaciones a la noción de porcentaje.

Actividad 1

Tres cuartos, tres de cada cuatro o 75%

En esta actividad se analizan diferentes formas de expresar la relación entre una parte y un todo o entre dos partes.

1. Analice y conteste las preguntas correspondientes a cada situación.

a) En el grupo **A**, 7 alumnos salieron reprobados.
En el grupo **B**, 10 alumnos salieron reprobados.

¿En qué grupo los alumnos reprueban más?_____
¡Cuidado!, para poder contestar hace falta más información.
¿Qué información hace falta? _____

Veamos ahora:
El grupo **A** tiene 14 alumnos, y reprobaron 7.
El grupo **B** tiene 50 alumnos y reprueban 10.
¿En qué grupo los alumnos reprueban más?_____
El grupo **C** tiene 40 alumnos y reprobaron 8.
¿En qué grupo reprueban más, en el **B** o en el **C**? _____
¿Cómo lo averiguó?_____

b) En el grupo **D** reprobó $\frac{1}{10}$ del grupo. En el grupo **E** reprobó $\frac{2}{5}$ del grupo. ¿En qué grupo reprueban más los alumnos?
_____

Como en este ejemplo, hay muchas situaciones en las cuales lo que interesa saber es qué parte es una cantidad de otra cantidad, y no tanto conocer el número de elementos de esa cantidad. Las fracciones permiten expresar esta relación entre una parte y un todo.

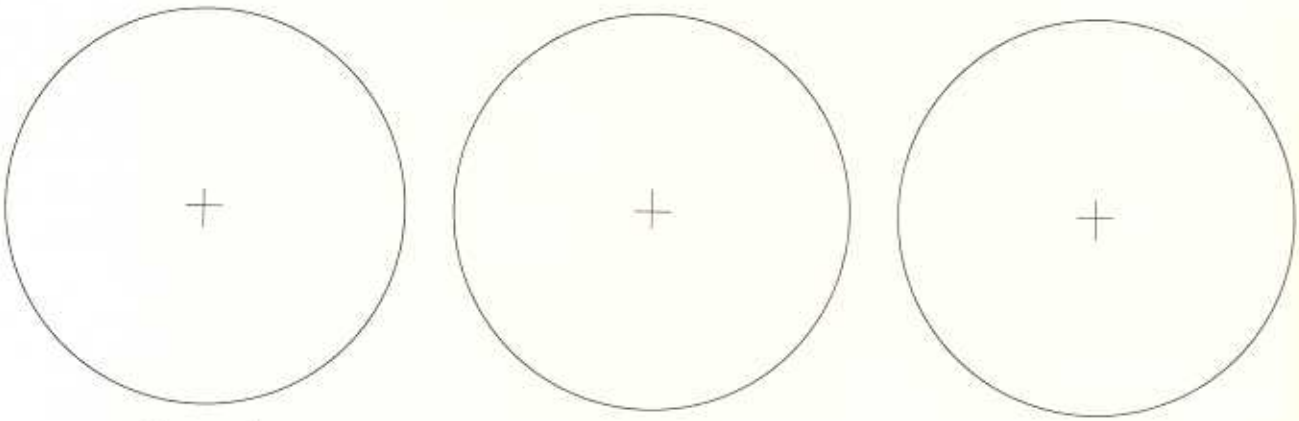
¿Qué parte del grupo **A** reprobó?_____

Recuerde: En el grupo **A** hay 14 alumnos. Por lo tanto un alumno representa $\frac{1}{14}$ del grupo, y 7 alumnos representan 7 veces más: $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

¿Qué parte del grupo **B** reprobó? _____

¿Qué parte del grupo **C** reprobó? _____

c) Represente la parte que reprobó en cada grupo (**A, B, C**) con diagramas circulares. La superficie completa representa al grupo completo:



Grupo A **Grupo B** **Grupo C**

- Calcule el porcentaje de reprobados en cada grupo y escriba en su cuaderno el o los procedimientos utilizados en cada caso.

Una manera de calcular el porcentaje de alumnos reprobados es la siguiente: si en el grupo C reprobó $\frac{1}{5}$ del total de alumnos, se busca una fracción equivalente a ésta con denominador 100: es $\frac{20}{100}$, es decir, el 20% de los alumnos del grupo C reprobó.

2. En el grupo **A**, de 14 alumnos reprobaron 7.

En el grupo **B**, de 50 alumnos reprobaron 10.

a) Si el grupo **B** hubiera tenido 100 alumnos y hubieran reprobado los alumnos en la misma proporción, ¿cuántos hubieran reprobado?

reprobados	con respecto a:
10	50
	100

*La expresión "20 alumnos de 100 reprobaron" expresa el porcentaje de alumnos reprobados en el grupo **B**: 20%.*

b) Encuentre el porcentaje de alumnos reprobados en el grupo **A**.

c) Si en un grupo **F** reprobaron 20 de 30 alumnos, ¿qué porcentaje del grupo reprobó?

En este caso, para calcular el número de alumnos reprobados con respecto a 100 alumnos, resulta práctico calcular primero el número de reprobados con respecto a 10, o bien con respecto a 300.

3. Complete las siguientes tablas:

reprobados	con respecto a:
20	30
	10
	100

reprobados	con respecto a:
20	30
	300
	100

4. Según el censo de población de 1990:

- la población total del Área Metropolitana de la Ciudad de México (AMCM) tiene 15,002,838 habitantes.
- aproximadamente, uno de cada tres habitantes es menor de 14 años, tres de cada cinco habitantes tienen entre 14 y 64 años, y uno de cada 15 habitantes tiene más de 64 años.

a) Para saber qué porcentaje aproximado de la población del AMCM tiene menos de 14 años, complete la siguiente tabla:

Menos de 14 años	Con respecto a:
1	3
?	100

b) Aproximadamente, ¿qué porcentaje de la población del AMCM tiene entre 14 y 64 años? _____

c) Aproximadamente, ¿qué porcentaje de la población del AMCM tiene más de 64 años?_____

_____

d) Aproximadamente, ¿cuántos habitantes del AMCM tienen menos de 14 años?_____

e) Aproximadamente, ¿cuántos habitantes del AMCM tienen entre 14 y 64 años?_____

f) Aproximadamente, ¿cuántos habitantes del AMCM tienen más de 64 años?_____

g) Represente en un diagrama circular los tres sectores de edad en que se dividió la población del AMCM.

Como usted pudo observar, las fracciones, los porcentajes y las expresiones "x de cada y" permiten expresar qué parte de una cantidad es otra cantidad.

Actividad 2

¿Nos toca dar lo mismo?

En esta actividad analizará una lección de sexto grado cuyo propósito es estudiar la noción de porcentaje como fracción de una cantidad, en un contexto en la que interesa que unas cantidades sean proporcionales a otras.

- Lea el siguiente texto y vaya contestando lo que se pregunta.

Un grupo de seis agricultores decidió unirse y pedir dinero prestado al banco para construir un canal que les permitiera regar sus tierras.

Antes de ir al banco, discutieron acerca de cómo podrían ir pagando ese dinero:

Arnulfo dijo:

"A ver, para empezar, veamos cuántos kilogramos de naranja obtuvo cada uno este año."

Antonio dijo:

"Este año nos fue bien, pero qué tal el año pasado, no sacamos ni para comer".

Jerónimo apuntó en un papel la cantidad de kilogramos de naranja que cada uno cosechó el año pasado y el año presente:

	El año pasado	Este año
Arnulfo	1 000 kilogramos	5 000 kilogramos
Antonio	600 kilogramos	3 000 kilogramos
Matías	3 000 kilogramos	15 000 kilogramos
Herminio	1 000 kilogramos	5 000 kilogramos
Don Gil	1 200 kilogramos	6 000 kilogramos
Jerónimo	300 kilogramos	1 500 kilogramos

¿Quién cosechó más naranja este año? _____

Arnulfo dijo bromeando:

"Matías es el ricachón, pues que él pague el préstamo".

A Matías no le gustó la idea y propuso otra:

"Lo justo es que cada uno dé lo mismo. Cada uno debe dar 500 kilogramos de naranja al año para pagar al banco".

Jerónimo no estuvo de acuerdo.

¿Por qué creen que no estuvo de acuerdo? _____

_____

La discusión continuó así:

Jerónimo dijo*"Yo, ni dando todo lo que saqué el año pasado me hubiera alcanzado. Matías puede dar porque tiene harta tierra. Además, precisamente Matías*

va a ser el más beneficiado porque es el que más tierra va a poder regar".

¿Ustedes qué aconsejarían a los agricultores? _____

_____

_____

Arnulfo propuso algo que convenció a la mayoría:

"Para ser más justos, dijo, debe dar más el que tiene más, y debe dar menos el que tiene menos, ni modo de que alguien se quede sin comer".

Antonio agregó: *"Yo estoy de acuerdo, y además no podemos dar lo mismo todos los años. Si nos va bien como este año, pues damos más, si nos va mal, damos menos".*

¿Como cuántos kilogramos de naranja creen ustedes que debería dar cada agricultor para pagar este año? Conteste en los espacios en blanco.

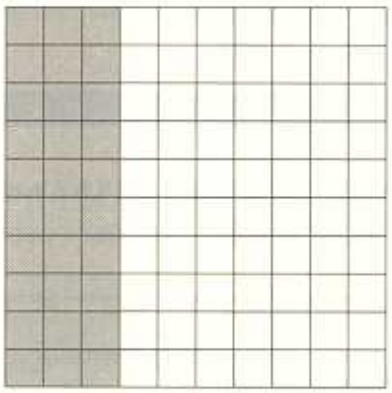
Arnulfo: _____ Antonio: _____ Matías: _____

Herminio: _____ Don Gil: _____ Jerónimo: _____

Herminio propuso lo siguiente: *"Lo que cada quien coseche en el año, lo divide en 100 partes iguales. De esas 100 partes, 30 las entrega para pagar y las otras 70 se las queda. Es decir, cada quien da* $\frac{30}{100}$ *de lo que cosecha".*

Varios no entendieron la idea de Herminio.

Herminio dibujó entonces 100 cuadros en una hoja, encerró 30 y explicó: *"Cada quien divide lo que cosechó en el año en 100 partes iguales, como si repartiera su cosecha en 100 cajones".*



Si Herminio reparte los 5 000 kilogramos de naranja que cosechó este año en 100 cajones, de tal manera que en cada cajón haya lo mismo,

¿Cuántos kilogramos habrá en un cajón? _____
¿Cuántos kilogramos habrá si se junta lo de 30 cajones?_____
¿Cuántos kilogramos habrá si se junta lo de 70 cajones?_____
¿Cuántos kilogramos habrá si se junta lo de los 100 cajones?
_____

Herminio hizo cuentas y dijo: *"Yo divido mi cosecha de 5 000 kilogramos en 100 partes iguales. Entonces, cada parte es de 50 kilogramos.*
Pago al banco 30 partes, es decir, 30 veces 50 kilogramos, que es igual a 1 500 kilogramos.
Yo me quedo con 70 partes, es decir, con 3 500 kilogramos de naranja".

Los demás comentaron: *"Ah, es como si cada uno diera la mitad de su cosecha".*
"Es menos de la mitad, es más o menos la tercera parte de nuestra cosecha".
"Es como si diéramos el 30 por ciento de nuestra cosecha".
"Exactamente, dijo Herminio".

Tomando en cuenta los vasos que hay sobre la mesa, la razón de vasos llenos a vasos vacíos es 2 a 1. Después de vaciar dos vasos llenos queda la misma cantidad de vasos llenos y de vasos vacíos. ¿Cuántos vasos hay en total sobre la mesa?

Para sacar el 30 por ciento de una cantidad, se divide la cantidad en 100 partes iguales y se toman 30 partes. El 30 por ciento de una cantidad es lo mismo que $\frac{30}{100}$ *de una cantidad.*

Como Antonio cosechó este año 3 000 kilogramos de naranja, tendrá que dar al banco 30% de los 3 000 kilos. Para calcular a cuántos kilos es igual 30% de 3 000 kilos, dividan primero 3 000 kilos en 100 partes iguales, como si los repartieran en 100 cajones.

¿De cuántos kilos es cada parte?_____
Ahora, tomen 30 partes, es decir, multipliquen el resultado anterior por 30.
Por lo tanto, ¿cuánto es el 30% de 3 000 kilos?_____

Para calcular cuántos kilogramos de naranja tendrían que dar los demás agricultores para pagar al banco este año, completen los datos que faltan en la siguiente tabla.

	La cosecha de este año fue de:	La cosecha de este año entre 100 partes es igual a:	30 partes es igual a:
Arnulfo	5 000		
Antonio	3 000		
Matías	15 000		
Herminio	5 000	50	1 500
Don Gil	6 000		
Jerónimo	1 500		

¿Se cumple lo deseado por Arnulfo de que quien tiene más pague más y quien tiene menos pague menos?

_____
_____
_____
_____

¿Se cumple lo que quería Antonio de que si en un año les va bien paguen más, y si en un año les va mal paguen menos?

_____
_____
_____
_____

En esta situación, el porcentaje de una cantidad, por ejemplo, 30% de 5 000, se define como una fracción de la cantidad: $\frac{30}{100}$ de 5 000, y se utiliza para establecer una relación proporcional entre la cantidad de kilogramos que cosechan los agricultores cada año y lo que aportan para pagar el préstamo.

Actividad 3

Algunas maneras rápidas para calcular porcentajes

En esta actividad resolverá algunos problemas de porcentajes a través de procedimientos sencillos.

1. Resuelva los siguientes problemas, y anote en su cuaderno los procedimientos utilizados.

a) A continuación se da el porcentaje de hombres en 10 comunidades del estado de Oaxaca.

A: 15%	**B**: 70%	**C**: 75%	**D**: 50%	**E**: 10%
F: 25%	**G**: 60%	**H**: 30%	**I**: 5%	**J**: 20%

Escriba, en cada caso, las comunidades en que:

- Más de la mitad de la población son hombres. _____
- La mitad de la población son hombres. _____
- Menos de la mitad de la población son hombres. _____
- La cuarta parte de la población son hombres. _____
- Las tres cuartas partes de la población son hombres. _____
- Cerca de la tercera parte de la población son hombres. _____
- La quinta parte de la población son hombres. _____
- La décima parte de la población son hombres. _____

Recuerde que 75% puede representarse con la fracción $\frac{75}{100}$, y que ésta es equivalente a $\frac{3}{4}$.

Comparar porcentajes con las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, ayuda a tener una idea del tamaño que indica un porcentaje y permite también, en algunos casos, facilitar los cálculos.

Por ejemplo, si se sabe que 20% es la quinta parte, para calcular el 20% de una cantidad ¡basta con dividir entre 5!

2. El 10% del precio de una mercancía es igual a 20 pesos. Calcule mentalmente:

a) el 20%_____ b) el 50%_____ c) el 5%_____
d) el 25%_____ e) el 75%_____ f) el 1%_____ g) el 12%_____

Para calcular porcentajes de una cantidad, muchas veces resulta práctico calcular el 10%. Conociendo el 10%, para calcular, por ejemplo, el 20%, basta con multiplicar por 2; para el 5%, basta con dividir entre dos. Asimismo, a veces también puede ser útil calcular el 1%. Entonces, para obtener, por ejemplo, el 12%, basta con sumar el 10% y el doble de 1%.

¿Y cómo se puede calcular el 10%? ¡Muy fácilmente!

- Calcule el 10% de:

200 pesos; _____ 125 pesos; _____
74 pesos; _____ 9 pesos; _____

El 10% de una cantidad es $\frac{10}{100}$ ó $\frac{1}{10}$ de esa cantidad. Por lo tanto, para obtener el 10% se divide la cantidad entre 10, lo que puede hacerse rápidamente corriendo el punto un lugar a la derecha: 10% de 3 000 = 300.0 10% de 87 = 8.7 10% de 5 = 0.5 Asimismo, el 1% de una cantidad es equivalente a la centésima parte de la cantidad, y puede obtenerse dividiendo la cantidad entre 100, es decir corriendo el punto decimal dos lugares a la derecha:

1% de 3 000 = 30.00 1% de 87 = 0.87
1% de 5 = 0.05

Estas formas de calcular porcentajes son muy prácticas para hacer los cálculos mentalmente, pero no deben proponerse prematuramente. Es importante que previamente los alumnos comprendan el significado de esta noción, y la puedan aplicar en varios contextos.

Actividad 4

Otros problemas de porcentaje.

En esta actividad analizará algunas expresiones en las que se utiliza el porcentaje.

1. Lea las siguientes expresiones y conteste las preguntas.

a) El precio del pan subió, en los últimos cinco años, el 100%.
¿Es posible?_____ ¿Qué significa? _____

¿A cuáles de las siguientes expresiones es equivalente?

- Ahora cuesta la mitad de lo que costaba hace 5 años.
- Ahora cuesta el doble de lo que costaba hace 5 años.
- Ahora cuesta lo que costaba hace 5 años más la mitad de lo que costaba.

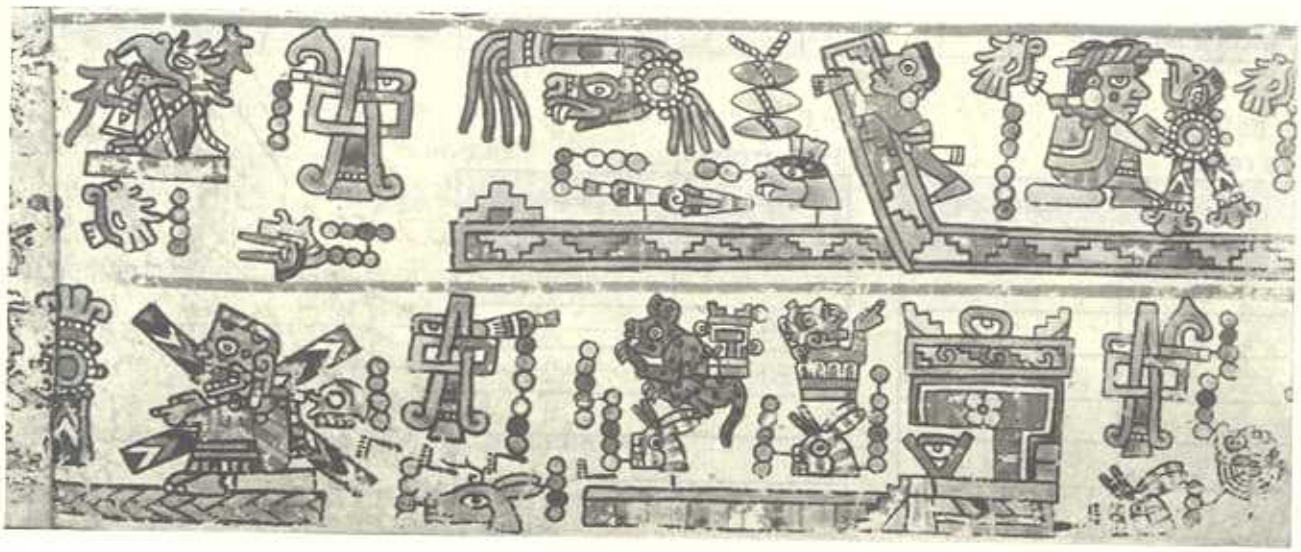
b) El 120% de la población entrevistada afirmó leer al menos un libro al año.
¿Es posible? _____ ¿Qué significa? _____

¿A cuáles de las siguientes expresiones es equivalente?

La población que afirmó leer por lo menos un libro al año es:

- La quinta parte de la población entrevistada.
- La población entrevistada más un quinto de la misma.
- Un poco más de la mitad de la población entrevistada.

En un reconocimiento médico se descubre que hay 120 niños con caries. Por término medio ha habido un niño con caries de cada cinco. ¿Cuántos niños se han reconocido aproximadamente?



Tema 3
La proporcionalidad inversa

Actividad 1

Entre más somos, menos nos toca

En esta actividad se distinguen dos tipos de variación proporcional: directa e inversa. Asimismo, se analizan algunas propiedades de las magnitudes inversamente proporcionales.

1. Resuelva los siguientes problemas y realice en su cuaderno los cálculos necesarios.

a) ¿Cuántos rectángulos de 36 centímetros cuadrados se pueden construir de tal manera que la base y la altura sean números enteros? Dibuje todos los rectángulos.

b) Una casa es alquilada por seis muchachos y cada uno paga $ 200. Si dicha casa fuera alquilada por 5 personas, ¿cuánto pagará cada una? ¿por 4? ¿por 2?

c) Una fábrica tiene petróleo suficiente para 20 días consumiendo dos barriles diarios. ¿Qué cantidad de petróleo debe consumir la fábrica diariamente para que le alcance para 30 días?

2. Complete las siguientes tablas.

Los rectángulos

Base en cm	36	18			6		3		
Altura en cm			3	4		9			

La renta

N° de personas	Precio por persona
8	
6	$ 200
	$ 240
4	
3	
	$ 600

El petróleo

Tiempo en días	N° de barriles por día
	1
30	
20	2
	4
5	

3. Diga cuáles de las siguientes propiedades se cumplen en cada tabla.

a) Cuando crece una de las magnitudes, la otra disminuye. Por ejemplo, si la medida de la base aumenta, la medida de la altura disminuye. _____

b) Cuando una magnitud crece el doble, el triple, etc., la otra disminuye la mitad, la tercera parte. _____

c) Escoja una columna de la tabla de los rectángulos. Multiplique la medida de la base de un rectángulo por la medida de la altura.
¿Cuánto obtiene? ¿Qué representa esa cantidad?
_____

Si hace lo mismo con los datos de otra columna, ¿piensa que se debe obtener un número mayor, menor o igual? Compruebélo.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si cuando una aumenta, la otra disminuye en la misma proporción; también se puede decir que son inversamente proporcionales si al multiplicar las cantidades correspondientes, el producto es constante.

Por ejemplo, en el caso de los rectángulos, el producto de la base por la altura siempre es igual a 36. Esta cantidad se llama constante de proporcionalidad y representa el área de los rectángulos (36 cm^2).

En los tres ejemplos vistos, las magnitudes son inversamente proporcionales.

4. Represente los datos de cada tabla en un sistema de coordenadas cartesianas, como lo hizo en el punto 4 de la actividad 1, tema 1, capítulo II.

¿Las líneas que forman los puntos representados son rectas?
_____
_____

¿Existe el par de valores (0,0) en cada una de las gráficas?
_____
_____

Mencione las diferencias que existen entre las gráficas de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa.

_____

¿Qué tienen en común las gráficas que representan a las situaciones de variación proporcional directa? ¿Y las de proporcionalidad inversa?_____

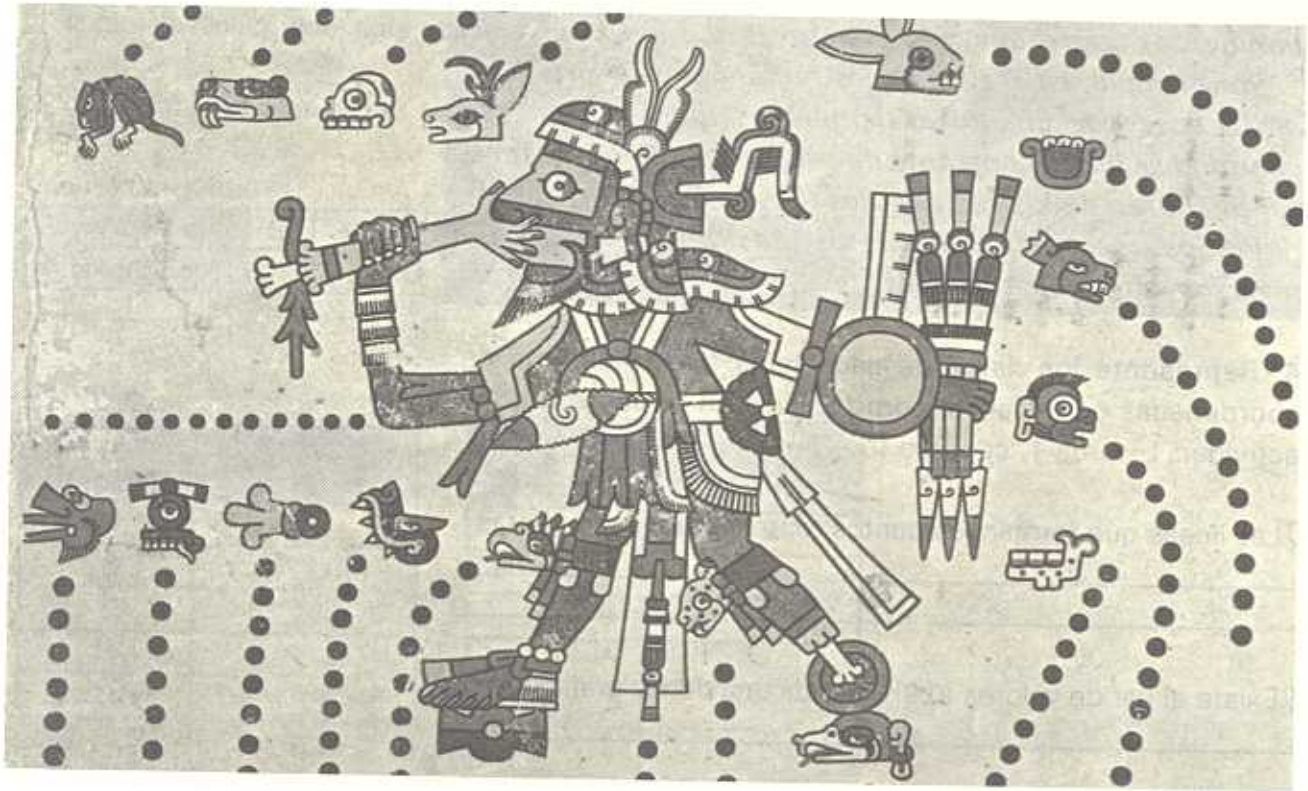
5. A continuación se presentan algunas definiciones de cantidades inversamente proporcionales, encontradas en diferentes libros. Marque con una cruz la que considera correcta, y justifique su apreciación en cada caso.

a) Dos cantidades son inversamente proporcionales cuando al aumentar una cantidad, la otra disminuye.

b) Dos cantidades son inversamente proporcionales si el producto de las cantidades correspondientes es constante.

c) Dos cantidades son inversamente proporcionales cuando al aumentar una cantidad, la otra disminuye en la misma proporción.

Andrés, Bernardo y Claudio salen a pasear en bicicleta, cada uno está sobre la bicicleta de uno de sus amigos y usa el sombrero del otro. El que lleva el sombrero de Claudio está sobre la bicicleta de Bernardo. ¿Quién está sobre la bicicleta de Andrés?



Actividad 2

Nuestros materiales de trabajo

En los libros de texto de Matemáticas de 4°, 5° y 6° grado y en otros materiales, identificará, resolverá y analizará algunas actividades sobre la variación proporcional.

1. Resuelva las lecciones "Hacemos recetas", pág. 122 del L.T.M. 4°, y la última actividad de la lección "Los tapetes de Doña Hortensia", pág. 123 del L.T.M. 6°.

- Explique en qué aspecto es más difícil el ejercicio de 6° grado que el de 4° grado.

_____

_____

_____

Material:

- *Plan y Programas de estudio 1993. Educación Básica. Primaria.*
- Avance programático. Matemáticas 4°, 5° y 6° grado.
- Libro de texto. Matemáticas (L.T.M.) 4°, 5° y 6° grado.

Observe que el ejercicio de 4° grado se puede resolver aplicando dobles y mitades. Por ejemplo, para obtener los ingredientes de la receta de gelatina para 12 personas, se pueden duplicar las cantidades de la receta para 6 personas. En cambio, en el ejercicio de 6° grado es necesario conocer el precio por unidad, digamos, el precio de una servilleta chica para calcular cuánto costarán cinco.

Mario Gómez Casas

2. Busque dos maneras de completar la tabla de la página 55 de la lección "Las recetas de la tía", del L.T.M. 6°, y el ejercicio de la página 101 de la lección "El puesto de jugos", del L.T.M. 5°.

- A continuación se muestra una manera de resolver cada uno de los ejercicios anteriores.

Vasos de jugo	Naranjas que se requieren
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{4}$
1	3
$2\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$
$2\frac{3}{4}$	$8\frac{1}{4}$
3	9
$3\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$

x 2, x 2, x 3, x 3

1 vaso — 3 Na.

$\frac{1}{2}$ vaso — $1\frac{1}{2}$ Na.

$\frac{1}{2}$ vaso — $1\frac{1}{2}$ Na.

$+\frac{1}{4}$ vaso — $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ Na.

$\frac{3}{4}$ vaso — $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ Na.

2 vasos — 6 Na.

$+\frac{1}{2}$ vaso — $1\frac{1}{2}$ Na.

$2\frac{1}{2}$ vaso — $7\frac{1}{2}$ Na.

$+\frac{1}{4}$ vaso — $\frac{3}{4}$ Na.

$2\frac{3}{4}$ vaso — $8\frac{1}{4}$ Na.

3 vasos — 9 Na.

$+\frac{1}{2}$ vaso — $1\frac{1}{2}$ Na.

$3\frac{1}{2}$ vaso — $10\frac{1}{2}$ Na.

÷ 2, x 2

pasteles	1	2	3	4	5
tazas de harina	$3\frac{1}{2}$	7	$10\frac{1}{2}$	14	$17\frac{1}{2}$

÷ 2, x 2

2 p — 7 tazas

$+$ 1 p — $3\frac{1}{2}$ tazas, la mitad de 7

3 p — $10\frac{1}{2}$ tazas

$+$ 2 p — 7 tazas

5 p — $17\frac{1}{2}$ tazas

2p — 7 tazas

x 2 → 4 p — 14 tazas ← x 2

Al resolver los problemas con procedimientos como los anteriores, los niños aplican varias propiedades de la variación proporcional directa, lo cual les permite comprender y desarrollar esta noción. El uso prematuro de fórmulas para resolver dichos problemas evita la realización de estos importantes procesos.

3. En varias lecciones de los libros de texto de 5° y 6° grado se plantean situaciones que pueden ser aprovechadas para trabajar sobre el tema de la proporcionalidad, por ejemplo, la lección "Un invento maravilloso", pág. 26 del L.T.M. 6°. Describa en su cuaderno qué situación de proporcionalidad se puede proponer a partir de esta lección.

4. Teniendo en cuenta los contenidos del Apartado de Matemáticas del *Plan y programas de estudio 1993. Educación Básica. Primaria*, seleccione y organice los contenidos que se presentan a continuación en una secuencia para 5° grado y otra para 6° grado:

- gráficas de proporcionalidad inversa.
- resolución de problemas de porcentaje.
- elaboración de tablas de variación proporcional y no proporcional.
- elaboración de tablas de proporcionalidad inversa.
- resolución de problemas de escala.
- reconocimiento y aplicación de las propiedades de las magnitudes directamente proporcionales en la resolución de problemas.
- gráficas de variación proporcional y no proporcional.
- elaboración de tablas de proporcionalidad directa.
- reconocimiento y aplicación de las propiedades de las magnitudes inversamente proporcionales en la resolución de problemas.

¿Qué hemos aprendido en este capítulo?

1. Lea los siguientes problemas e identifique en cada caso si se trata de una situación de variación proporcional directa o inversa o de variación no proporcional.

a) Leonardo tiene 12 años de edad y mide 148 centímetros de estatura. Dentro de 12 años tendrá 24 años, edad que es el doble de 12. ¿Creen que su estatura, a los 24 años, también será el doble?_____

b) En un anuncio de rentas de películas aparece lo siguiente:

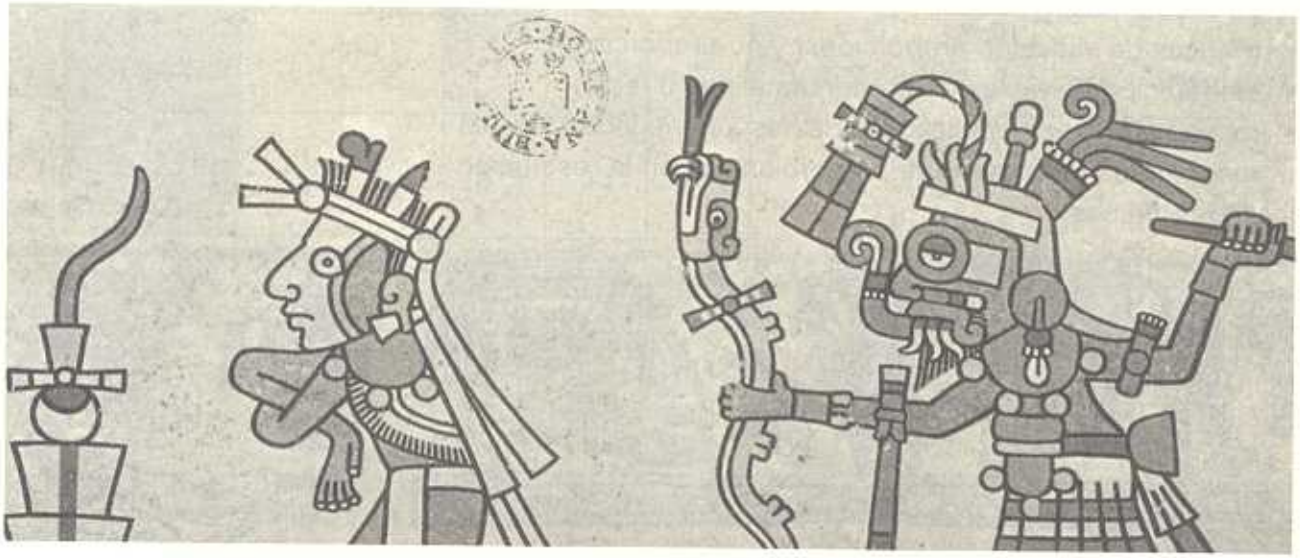
Renta por película	
un día	$ 4
dos días	$ 6

¿Cuánto se debe pagar por una película si se desea tenerla tres días?_____

c) Antes, Felipe trabajaba 6 horas diarias y dormía 8 horas. Actualmente, Felipe trabaja 12 horas, que son el doble de 6. ¿Creen que Felipe duerme el doble de 8 horas?

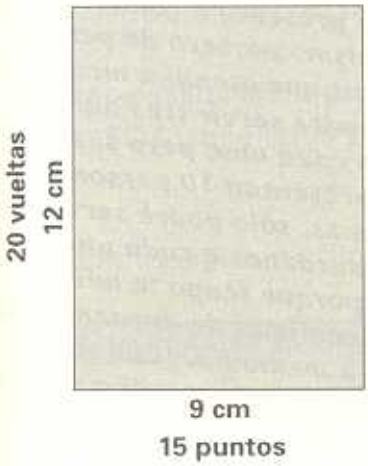
_____

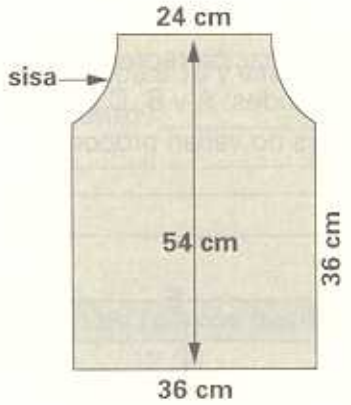
d) Un internado de 360 alumnos cuenta con provisiones para 30 días. ¿Cuánto tiempo durarán las provisiones si se admiten 40 nuevos alumnos?_____



2. Resuelva el siguiente problema:

María quiere hacer un suéter. Hace una muestra de 15 puntos y 20 vueltas y encuentra que mide 9 cm de ancho por 12 de largo. Si se quiere que la espalda tenga las siguientes dimensiones:





a) ¿Cuántos puntos tiene que montar para que el ancho del tejido sea de 36 cm?_____

b) ¿Cuántas vueltas tiene que tejer para que el largo hasta la sisa sea de 36 cm?_____

c) ¿Cuántos puntos tiene que disminuir en lo ancho del tejido para que se formen las sisas?_____

d) ¿Cuántas vueltas tiene que tejer de la sisa hasta rematar para que la altura total del tejido sea de 54 cm?_____

3. Complete la siguiente tabla considerando que la velocidad es constante:

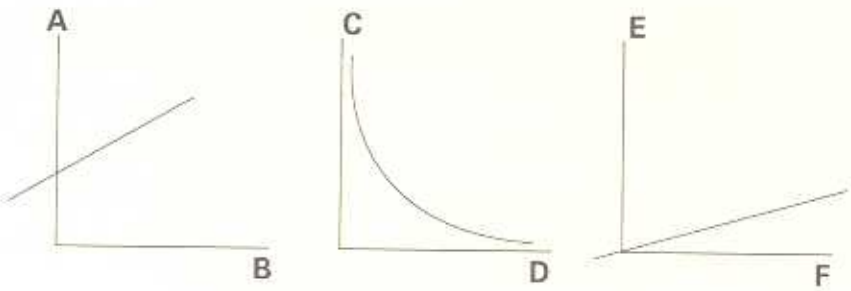
tiempo en horas	distancia en km
$\frac{1}{2}$	
$1\frac{1}{2}$	120
2	
$2\frac{1}{2}$	
$2\frac{3}{4}$	

a) Marque con una X los procedimientos que utilizó para completar la tabla.

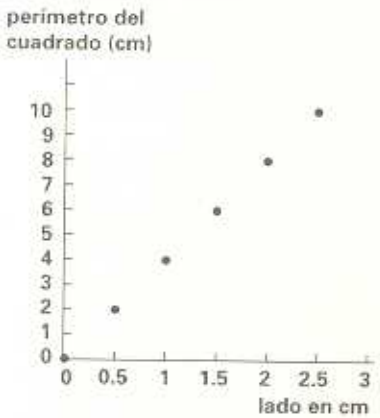
- cálculo del valor unitario. ( )
- cálculo de dobles, triples, etc. ( )
- obtención de un dato a partir de la suma o resta otros dos. ( )
- cálculo de la constante de proporcionalidad. ( )
- productos cruzados. ( )

4. a) Las gráficas que aparecen a continuación representan la variación de tres pares de magnitudes: A y B, C y D, E y F. ¿Cuáles de estas magnitudes no varían proporcionalmente? _____

_____



b) Observe la gráfica que representa el perímetro de un cuadrado en función de la medida de sus lados y complete la siguiente tabla:



lado en centímetros	perímetro del cuadrado (cm)
0	
	2
1	
	6
0.75	
	12

- Divida en cada caso el valor del perímetro entre la medida del lado, excepto para los valores (0, 0). ¿Qué obtiene? ¿Qué representa esa cantidad? ¿Por qué cree usted que se excluyen los valores (0, 0)? _____

_____

Un mesero me planteo este problema: «si esta noche se presenta a comer el mismo número de personas que atendí a mediodía, podré servir tres duraznos a cada una; pero si se presentan 10 personas más, sólo podré servir 2 duraznos a cada una, porque tengo la misma cantidad de duraznos que a mediodía. ¿Cuántas personas atendí a mediodía?

5. Exprese en porcentaje las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{5}{20}$ e) $\frac{1}{8}$ f) $\frac{1}{6}$

6. Resuelva el siguiente problema:

Si el año pasado el kilogramo de café costaba $ 16 y este año cuesta $ 24, ¿qué tanto por ciento aumentó?

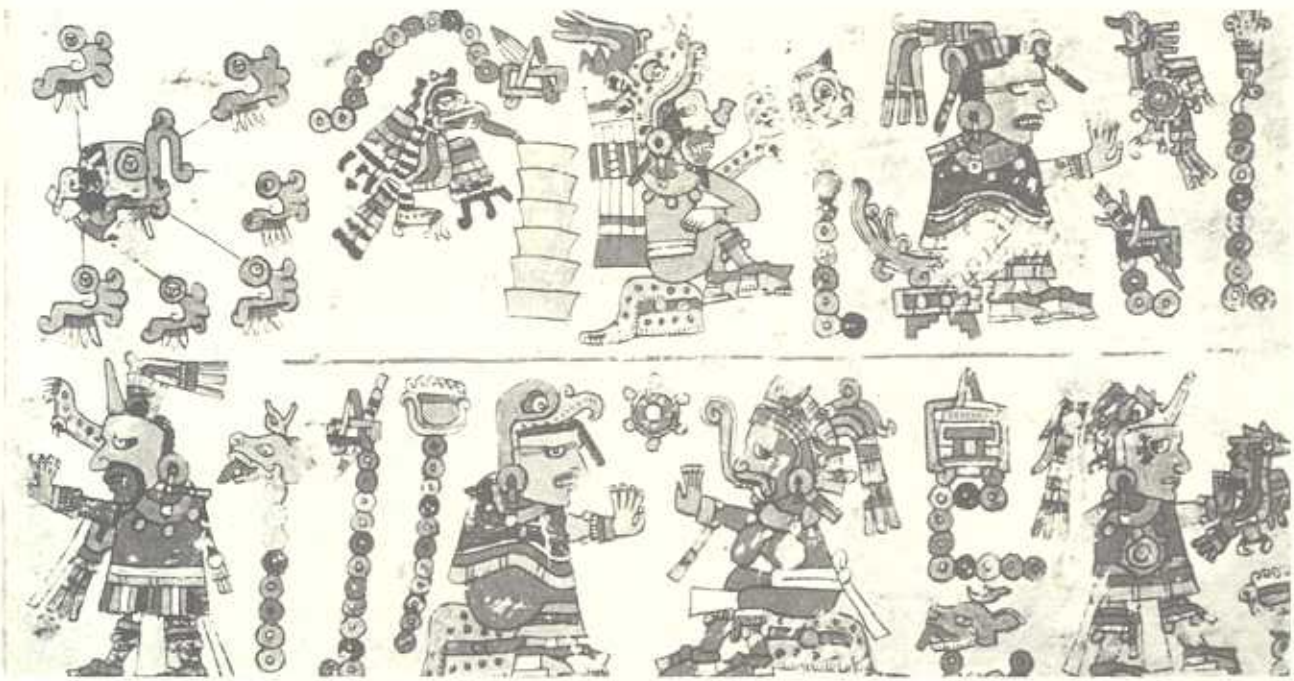
7. Frente al siguiente problema:

Número de tamales vendidos	Precio en nuevos pesos
5	12.50
15	?

a) ¿Qué procedimiento de resolución conviene propiciar en la primaria? ¿El I o el II?

Procedimiento I: $\frac{15 \times 12.50}{5} = X$

Procedimiento II: 15 es el triple de 5, entonces, por 15 tamales hay que pagar 12.50 x 3 = 37.50 pesos.



b) Complete la siguiente tabla:

Número de vueltas de la rueda A	Número de vueltas de la rueda B
5	7
6	

¿Por qué es más difícil este problema que el planteado en el punto a)? _____

8. A continuación se da una lista de contenidos del tema variación proporcional y no proporcional. Escriba a la derecha de cada uno un número que muestre la secuencia de enseñanza de estos contenidos, de tal manera que el primer contenido a trabajar lleve el número 1.

( ) Resolución de problemas de proporcionalidad directa aplicando "la regla de tres".

( ) Resolución de problemas de proporcionalidad directa aplicando propiedades como: al doble le corresponde el doble, etcétera.

( ) Resolución de problemas de proporcionalidad directa mediante el cálculo del valor unitario.

Mario Gómez Casas

III

Tratamiento de la información

En la actualidad se recibe constantemente información cuantitativa en estadísticas, gráficas y tablas. Por ello, es necesario que los alumnos, desde la primaria, se inicien en el análisis de la información de estadística simple presentada en forma de gráficas o tablas, y también en el contexto de documentos, propagandas, imágenes u otros textos particulares. En este capítulo se abordan los contenidos de recolección, organización y análisis de la información que se desarrollan desde primer grado de la escuela primaria.

Actividad 1

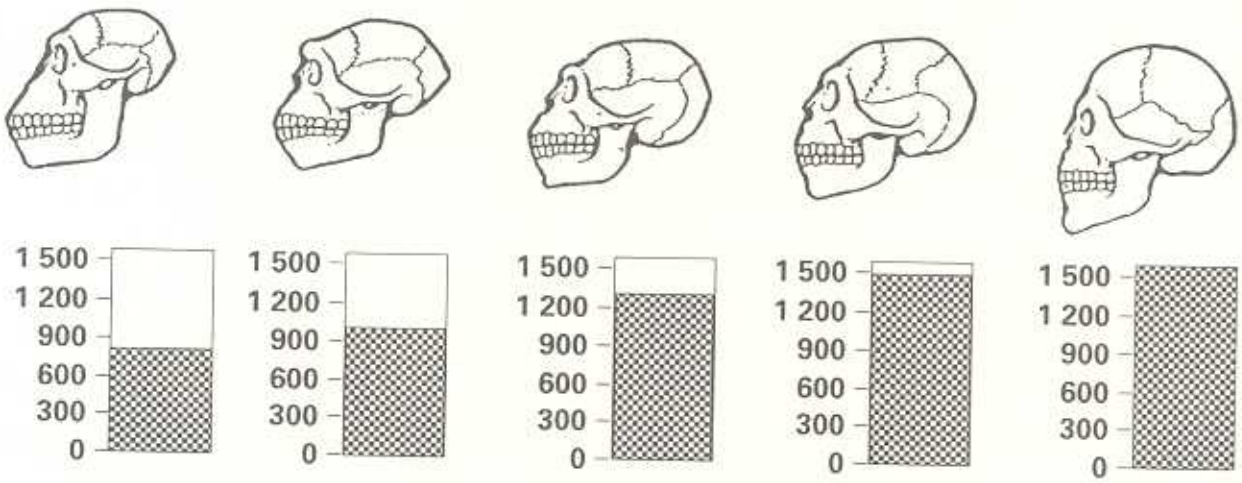
Informaciones diversas

En esta actividad se analizan informaciones provenientes de diferentes áreas de conocimiento como son la historia, la geografía y las ciencias naturales, presentadas mediante distintas gráficas.

Analice la información que se presenta en cada gráfica y complete la tabla en cada caso.

1. El estudio de los fósiles humanos muestra que el hombre no ha dejado de evolucionar desde que apareció por primera vez sobre la Tierra hace algunos millones de años. En la siguiente ilustración se muestra cómo ha evolucionado la capacidad craneana del hombre desde el *Australopithecus*, hace 3 millones de años, hasta el hombre de nuestros días.

Evolución y capacidad craneana



Capacidad craneana (centímetros cúbicos)

Australopithecus	Hombre de Java	Hombre de Pekín	Hombre de Neanderthal	Hombre moderno

Años transcurridos

3 000 000	700 000	500 000	100 000	40 000

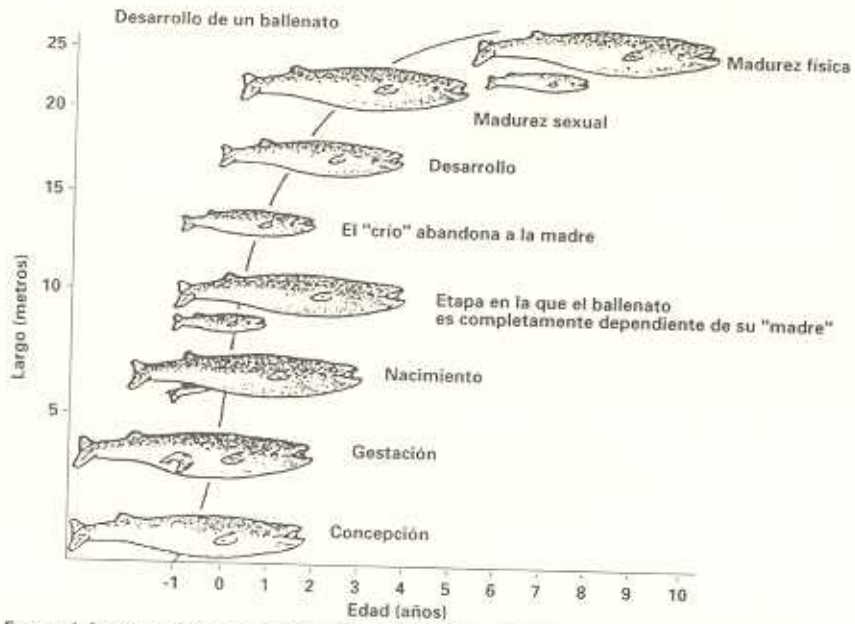
Fuente: *Investigación y ciencia* (edición en español de *Scientific American*), núm. 83, agosto de 1983.

- Utilice los datos de la ilustración para llenar la siguiente tabla:

	Antigüedad	Capacidad craneana aproximada
Australopithecus		
Hombre de Java		
Hombre de Pekín		
Hombre de Neanderthal		
Hombre moderno		

2. En la siguiente gráfica se ilustra el desarrollo de un ballenato desde la concepción hasta la madurez física. Utilice la información de la gráfica para llenar la tabla de la izquierda.

Desarrollo de un ballenato	
Edad en años	**Largo en metros**
Al nacer	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

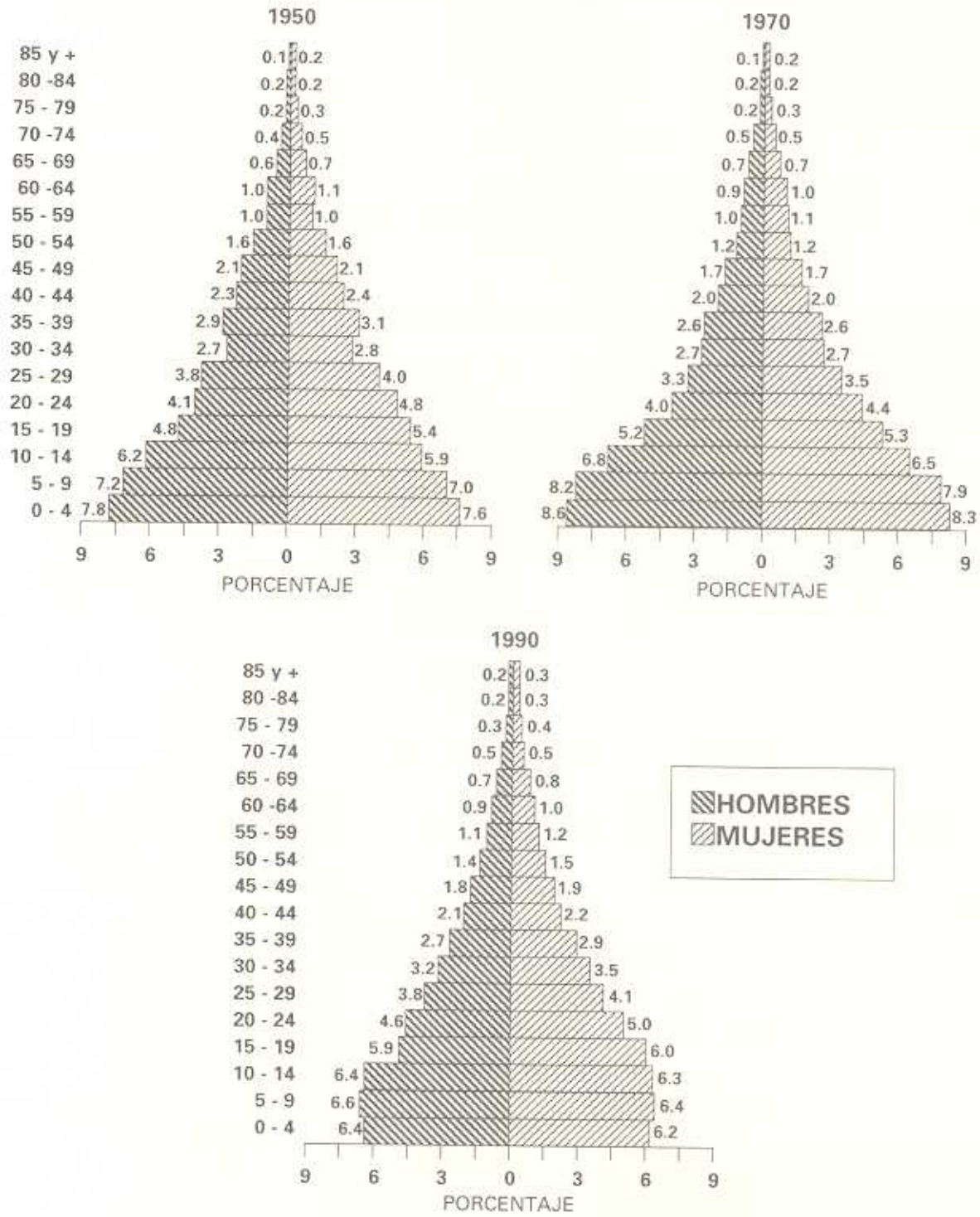


Fuente: Información Científica y Tecnológica. CONACYT, vol II. Núm. 29, 15 de septiembre de 1983

3. Los habitantes de un país no se distribuyen uniformemente por edades, es decir, no hay el mismo número de habitantes entre 0 y 5 años que entre 5 y 10 años; tampoco hay el mismo número de habitantes entre 5 y 10 años que entre 10 y 15 años, etcétera. Para representar gráficamente la distribución por edades de los habitantes de un país se utiliza un tipo especial de gráficas llamadas *pirámides de población o demográficas.*

Las ilustraciones de abajo le permitirán comparar las pirámides de población de México en los años 1950, 1970 y 1990.

ESTRUCTURA PORCENTUAL DE LA POBLACION MEXICANA
POR GRUPOS DE EDAD Y SEXO, 1950, 1970 Y 1990



Fuente: Censos Generales de Población y Vivienda, 1950, 1970, 1990, INEGI.

Conteste las siguientes preguntas para cada pirámide de población.

a) ¿Qué porcentaje de mexicanos son menores de 15 años?

_____

b) ¿Qué porcentaje de mexicanos tienen entre 15 y 64 años?

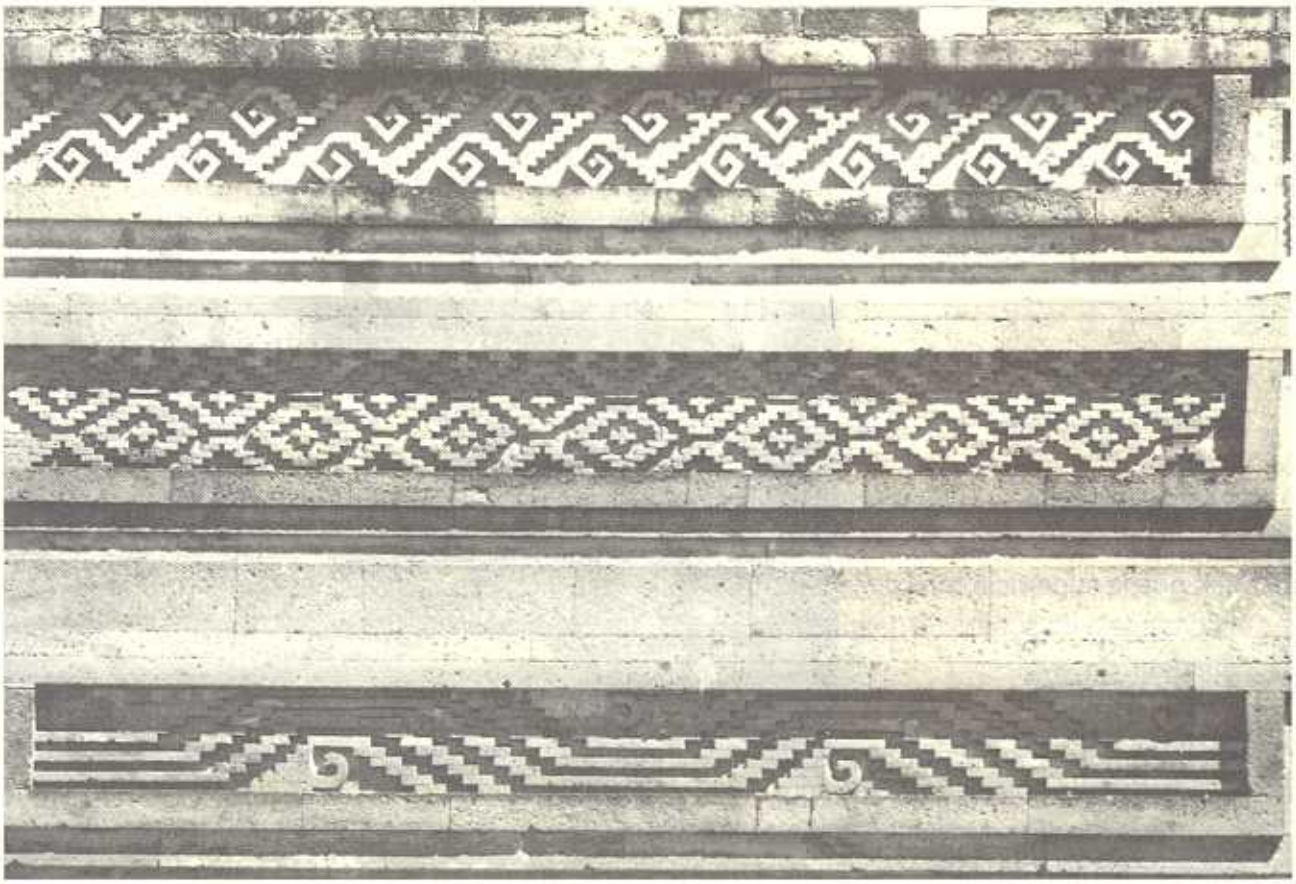
_____

c) ¿Qué porcentaje de mexicanos son mayores de 65 años?

_____

d) Represente en una gráfica de barras el porcentaje de mexicanos que son menores de 15 años en los años 1950, 1970 y 1990 y calcule el aumento o disminución de ese porcentaje, en años.

Repita esta actividad para el porcentaje de mexicanos que tiene entre 15 y 65 años y para los mayores de 65 años.



4. La siguiente tabla muestra el aumento de la población ganadera, y en consecuencia la paulatina ampliación de la superficie ganadera, datos que ponen en evidencia los ritmos de desforestación que sufre el país.

EXISTENCIAS Y SUPERFICIES GANADERAS EN MÉXICO 1930-1983

	(A)	(B)	(B) / (A)
	Existencia de ganado bovino (millones de Cabezas) [a]	**Superficie ocupada (millones de ha)** [b]	**"Coeficiente global de agostadero"**
1930	10.08	—	—
1940	11.59	38.81	3.35
1950	15.69	50.78	3.23
1960	17.66	55.75	3.15
1970	22.79	66.57	2.92
1980	32.27	78.00	2.41
1981	35.68	85.98	—
1982	36.20	87.24	—
1983	37.52	90.42	—

Fuentes: a. 1930-70: Dirección General de Estadística, Censo Agrícola, Ganadero y Ejidal. 1980: Reig, 1982. 1981-1983: Instituto Nacional de Estadística, SPP.
b. 1940-1950: Dirección General de Estadística, *Ibid.* 1960-80: Reig,1982. 1981-83: Estimado de acuerdo al "coeficiente global de agostadero" en 1980 (2.41 ha por cabeza de ganado).

a) Represente en una gráfica de barras la cantidad de ganado bovino para los años que se presentan en la tabla.

¿En qué años hubo un mayor aumento de ganado?_____

b) Averigüe la superficie total de la República Mexicana y calcule el porcentaje de superficie destinado, en 1983, a la producción ganadera.

¿Cuál fue el promedio de la superficie destinada a la producción de ganado bovino entre los años 1940 y 1980? Recuerde que el ***promedio*** se calcula sumando los datos y dividiendo entre el número de datos._____

c) Represente en una gráfica de barras la cantidad de hectáreas **por cabeza de ganado** que se ha destinado entre los años 1940 y 1980. Calcule la ***mediana*** y el promedio de hectáreas que se destinan a cada cabeza de ganado durante ese lapso.

Recuerde que la ***mediana*** es el número que queda a la mitad de la lista de datos ordenados de menor a mayor. Si el número de datos es par, la *mediana* es el promedio de los datos centrales.

Se tienen 9 monedas, una de ellas es falsa y pesa menos que las otras. Con una balanza, sin usar pesas, encontrar la moneda falsa con dos pesadas.

Como usted observó, el tratamiento de información tiene aplicaciones en una gran diversidad de disciplinas, como Historia, Geografía y Ciencias Naturales.

Los contenidos de este eje ofrecen la posibilidad de tratar contenidos de otras áreas de conocimiento, con herramientas de las Matemáticas, como son los números, el porcentaje, la variación, etcétera.

Actividad 2

Nuestros materiales de trabajo

El propósito de esta actividad es analizar el desarrollo del eje "Tratamiento de la información" en diferentes lecciones de los libros de texto de matemáticas de primero a sexto grado.

Mario Gómez Casas

Material:

- Libros de texto. Matemáticas (L.T.M.) 1°, 3°, 5° y 6° grado.

1. Revise la lección "¿Cómo está el clima hoy?", pág. 108 y "El puesto de juguetes", pág. 66 del L.T.M. 1°.

¿Cuál es el propósito de cada lección?_____

_____

¿Qué habilidades desarrollan los niños al resolver cada lección?

_____

¿Qué papel juega la ilustración en la lección "El puesto de juguetes"?_____

_____

Escriba tres preguntas más que se contesten con la información que aparece en cada ilustración.

_____

_____

_____

_____

_____

2. Resuelva la lección "En gustos se rompen géneros", página 170 del L.T.M. 3°.

¿Qué aspecto del eje "Tratamiento de la información" se trabaja en esta lección?_____

_____

¿Qué contenidos se trabajan?_____

_____

¿Qué habilidades desarrollan los niños al resolver esta lección?

_____

¿Qué dificultades considera que pueden tener los niños al resolverla?_____

_____

3. Resuelva la lección "El periódico", pág. 127 del L.T.M. 5°.
¿Cuál es el propósito de la lección?_____

_____

Pablito da pasos de 40 centímetros. Su padre da pasos de 66 centímetros. Si para recorrer una cuadra el padre dió 200 pasos, ¿cuántos pasos dió Pablito?

- Realice una clasificación acerca de las diferentes actividades que se plantean en esta lección y de los contenidos que se trabajan.

Actividades	Contenidos

4. Resuelva la lección "Las olimpiadas", pág. 58 del L.T.M. 6°.

¿Cuál es el propósito de esta lección? _____

_____

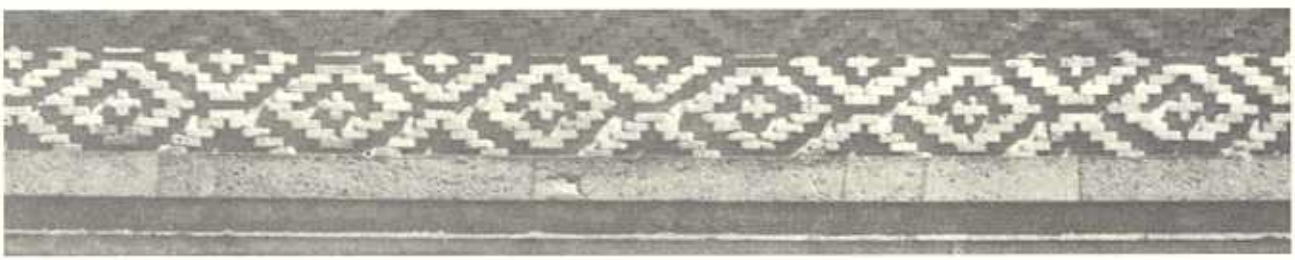
_____

¿Qué contenidos del eje "Tratamiento de la información" se trabajan en esta lección? _____

_____

Como pudo observar, las diferencias entre estas lecciones sobre tratamiento de la información, están en las fuentes de donde se saca la información y en el nivel del tratamiento que se hace de ella. En los primeros grados se manejan las ilustraciones como recurso para que los alumnos las analicen y resuelvan algunos problemas sencillos a partir de ellas.

En la lección de tercer grado se utiliza la encuesta como forma de obtener información, y se presenta una manera de organizar la información obtenida. En la lección de quinto grado se utiliza el periódico como un recurso que proporciona diferentes tipos de información, y en la lección de sexto grado se utilizan ***la mediana, la moda*** *y* ***el promedio*** *para analizar resultados de una olimpiada.*



¿Qué hemos aprendido en este capítulo?

En el cuadro se compara la esperanza de vida y el número de habitantes por médico en algunos países de América.

E S P E R A N Z A D E V I D A		
País	**Esperanza de vida (años)**	**Núm. de habitantes por médico**
E. U. A.	75	470
Cuba	75	720
Haití	55	7180
México	69	1240
Bolivia	53	1540
Venezuela	70	700

1. Conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la edad que aparece más veces? _____

b) ¿Cuál es el promedio de esperanza de vida en estos países?

_____

c) ¿Cuál es la mediana de los datos que se presentan?

_____

d) ¿En qué rango oscila el número de habitantes por médico?

_____

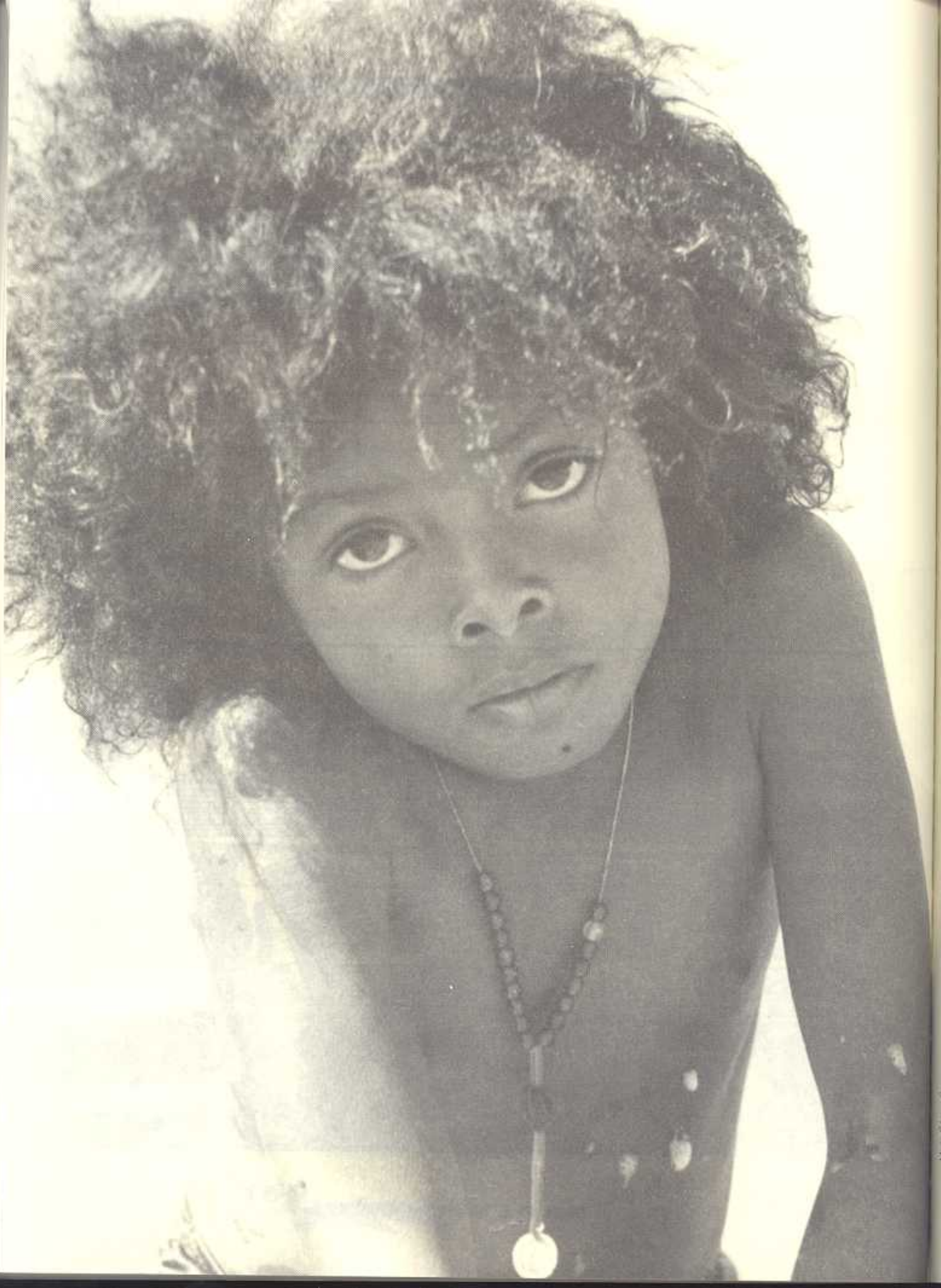
e) ¿En qué rango oscila la esperanza de vida de estos países?

_____

f) ¿Qué relación se puede establecer entre ambos indicadores?

_____

2. Represente en una gráfica de barras la esperanza de vida de los países que se indican.



IV

La predicción y el azar

Ciertas situaciones en las que el azar está presente, ofrecen la posibilidad de construir y utilizar conocimientos matemáticos para prever qué suceso es más probable que ocurra. En este capítulo se plantean algunas situaciones que permiten analizar las posibilidades de ganar un juego o de que ocurra un determinado evento, como sacar una canica blanca de una caja con canicas blancas y negras. Este tipo de situaciones permite realizar una introducción a la probabilidad, sin llegar a cuantificarla.

Actividad 1

Nuestros materiales de trabajo

El propósito de esta actividad es analizar el grado de complejidad conceptual que se trabaja en algunas lecciones de los libros de texto de tercero a sexto grado.

Material:

- Libros de texto. Matemáticas (L.T.M.). 3°, 4° y 6° grado.

1. Resuelva las actividades 1 y 2 de la lección "Juegos y números", página 144 del L.T.M. 3°.

¿Qué diferencia hay entre la actividad 1 y la 2?

_____

¿Cuál es el propósito de esta lección?_____

_____

¿Qué dificultades cree que puedan tener los alumnos para resolver esta lección?_____

_____

*En una situación o **experiencia aleatoria** sabemos que de dos o más acontecimientos sólo uno puede presentarse, pero no sabemos de antemano cuál ocurrirá. En cambio, en una **experiencia determinista** sabemos con certeza qué ocurrirá. Por ejemplo, si lanzamos una pelota hacia arriba, al aire libre, tenemos la certeza de que va a bajar. Éste es un fenómeno determinista. En cambio, cuando tiramos un dado, no sabemos qué número saldrá; éste es un fenómeno aleatorio.*

2. Resuelva la lección "Los colores del dado", página 76 del L.T.M. 4°.

¿Cuál es el propósito de esta lección?_____

_____

_____

Escriba otras dos maneras de registrar el conteo de los resultados.

_____

_____

¿Qué diferencias encuentra entre la lección de tercer grado y ésta?

_____

_____

Como usted habrá podido observar, en ambas lecciones se plantean situaciones en las que el azar está presente. La diferencia radica en que, en el caso de tercer grado, el propósito es que los alumnos jueguen sin necesidad de realizar ningún registro, mientras que en cuarto se introduce a los alumnos en diferentes formas de registro. A lo largo de la escuela primaria, los alumnos desarrollan diferentes formas de organizar los resultados de un juego o de un experimento aleatorio.

3. Resuelva con sus compañeros o familiares la lección "Carrera con dados", pág. 108 del L.T.M. 6°.

¿Ganó o perdió? _____ ¿Se cumplió su predicción? _____

¿Qué se debe tener en cuenta para tener más posibilidades de ganar? _____

_____

Si jugara otra vez la carrera, ¿qué carril escogería?

_____

¿Qué diferencias encuentra entre esta lección y las que resolvió anteriormente? _____

_____

_____

¿Qué contenidos aparecen en esta lección? _____

_____

_____

Los diferentes casos que pueden presentarse en una experiencia aleatoria se suelen llamar eventos, acontecimientos o posibilidades. En el juego "Carrera con dados", los números que se pueden obtener al sumar los puntos de ambos dados son: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12. Algunos de los 36 casos posibles al lanzar los dos dados son:

Dado 1	Dado 2	Suma
1	1	2
1	2	3
1	3	4

Al tener todos los casos posibles a la vista, puede verse que la suma que ocurre más veces es 7. Seis de los 36 resultados posibles dan una suma de 7. Se dice que la frecuencia de obtener 7, es seis. En este juego, como 7 es la suma que tiene mayor frecuencia, es la que tiene mayor posibilidad de ganar.

En la carrera interviene la suerte, y no es totalmente seguro que los números con más posibilidades de avanzar queden siempre en uno de los primeros lugares. Sin embargo, al jugar varias veces, esos números ganarán más veces que los otros.

Actividad 2

El juego interrumpido

En esta actividad, a partir de los seis resultados posibles al tirar un dado, se plantea un sencillo e interesante problema.

Resuelva la siguiente actividad con sus compañeros o familiares.

1. Juan y Pedro juegan a tirar cinco veces un dado. Quien saca mayor puntaje gana. Observe la tabla y conteste:

Juanito	1	6	2	1	4
Pedro	3	3	1	5	?

¿Qué números le pueden salir a Pedro?_____

¿Qué número tendría que sacar Pedro en la quinta tirada para ganarle a Juanito? _____

¿Qué número tendría que sacar para empatar? _____

¿Con qué números perdería?_____

Si tira el dado, ¿a qué le apostaría, a que gana, empata o pierde?

_____

2. Lupita y José se pusieron a jugar el mismo juego.

Lupita	1	6	2	1	?
José	3	3	1	5	?

¿Qué números deberían sacar Lupita y José para que Lupita gane?

_____

¿Y para que gane José? _____

¿Con qué números empatarían?_____

3. Según la tabla de abajo, ¿qué número debe sacar José para ganarle a Lupita? _____

¿Qué números debe sacar José para empatar?_____

¿Qué números debe sacar José para que Lupita gane?_____

Lupita	3	4	2	1	5
José	6	4	3	?	?

Esta actividad es interesante para los alumnos de tercer grado, porque además de jugar con las posibilidades para ganar o perder en cada caso, resuelven operaciones de suma y resta.

Actividad 3

Juegos combinatorios

Mediante la resolución de problemas de combinatoria con diferente grado de complejidad, los alumnos mejoran sus procedimientos para determinar todos los casos posibles que se pueden presentar en un juego de azar o en un experimento aleatorio, y de esta manera desarrollan gradualmente la noción de lo que es más probable o no es probable que ocurra en dichas situaciones. A la vez los alumnos enfrentan un tipo de problemas poco común que implica la multiplicación.

1. Resuelva los siguientes problemas.

a) Escriba los nombres de 2 niños y de 3 niñas. Utilizando un diagrama de árbol, obtenga la cantidad de parejas diferentes que se pueden formar con un niño y una niña.

b) Dibuje en una cartulina diferentes animales, por ejemplo, un perro, un gato, un changuito y un pato. De cada animal haga dos partes, cortando la cabeza. Forme todos los posibles animales extraños combinando las cabezas y los cuerpos entre sí. ¿Cuántos animales distintos se pueden armar?

c) Lupita tiene una muñeca y le gusta mucho cambiarle la ropa. La muñeca tiene 3 faldas: azul, verde y roja, y 3 suéteres: azul, rojo y verde. ¿De cuántas formas distintas puede vestir Lupita a su muñeca? Realice el diagrama de árbol y dibuje los diferentes conjuntos de ropa.

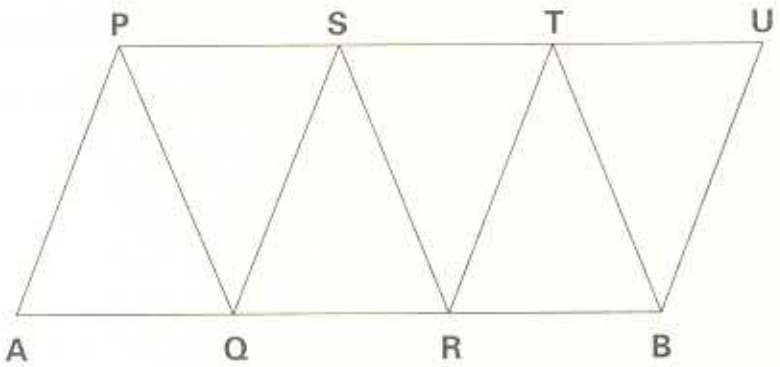
d) El juego consiste en hacer torres con un montón de cubos que se puedan embonar. Gana el que construya más torres diferentes.

¿Cuántas torres diferentes **de dos cubos** se pueden hacer con cubos de color rojo y amarillo? Puede haber torres con dos cubos del mismo color. Dos torres con los mismos colores, pero puestos en distinto lugar son dos torres diferentes, por ejemplo **AR** y **RA**._____

¿Cuántas torres de dos cubos se pueden hacer con cubos de color rojo, amarillo y verde? (Se pueden repetir colores, por ejemplo, **RR**.)_____

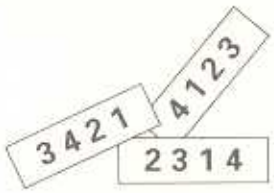
Dibuje un diagrama de árbol que represente cada caso.

e) Si sólo es posible caminar de **A** a **B** siguiendo las líneas del diagrama:



¿Cuántos caminos hay para llegar de **A** a **B**, sin pasar dos veces por el mismo punto? _____

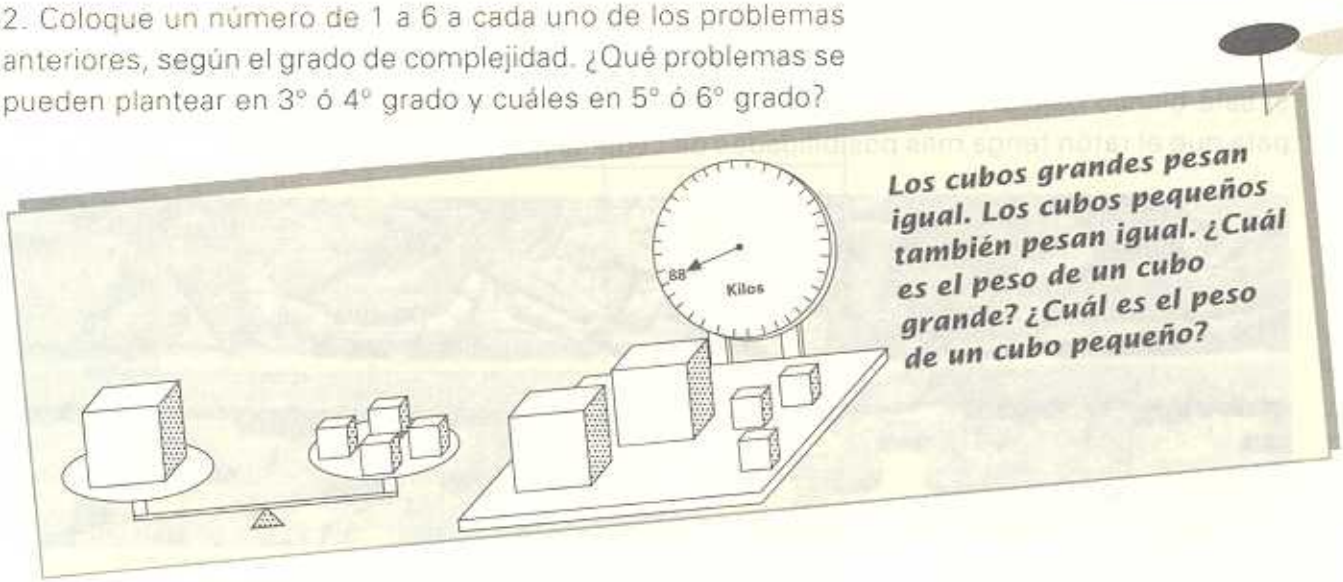
f) En una pequeña ciudad hay tan pocos autos, que los números de las placas se forman con las cifras 1, 2, 3 y 4. El señor Gómez, que es fabricante, tiene que hacerlas.



¿Cuántas placas se pueden hacer con estas cuatro cifras?

_____

2. Coloque un número de 1 a 6 a cada uno de los problemas anteriores, según el grado de complejidad. ¿Qué problemas se pueden plantear en 3° ó 4° grado y cuáles en 5° ó 6° grado?


88
Kilos
Los cubos grandes pesan igual. Los cubos pequeños también pesan igual. ¿Cuál es el peso de un cubo grande? ¿Cuál es el peso de un cubo pequeño?

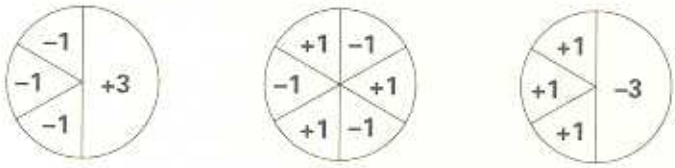
Actividad 4

Otros problemas para pensar

El propósito de esta actividad es que discuta algunos razonamientos en situaciones en las que el azar está presente.

1. Resuelva los siguientes problemas:

a) A Juan y Pedro les encanta ir a la feria y jugar al juego de las ruletas. El juego consiste en elegir una de las ruletas y realizar 5 tiradas por $ 5. Si al girar la ruleta le toca + 1, significa que va ganando $ 1 y si le sale -1, que va perdiendo $ 1. Lo mismo sucede con el + 3 y el - 3. ¿Qué ruleta les conviene elegir para tener más posibilidades de ganar?



b) El siguiente razonamiento es incorrecto. Intente explicar por qué.

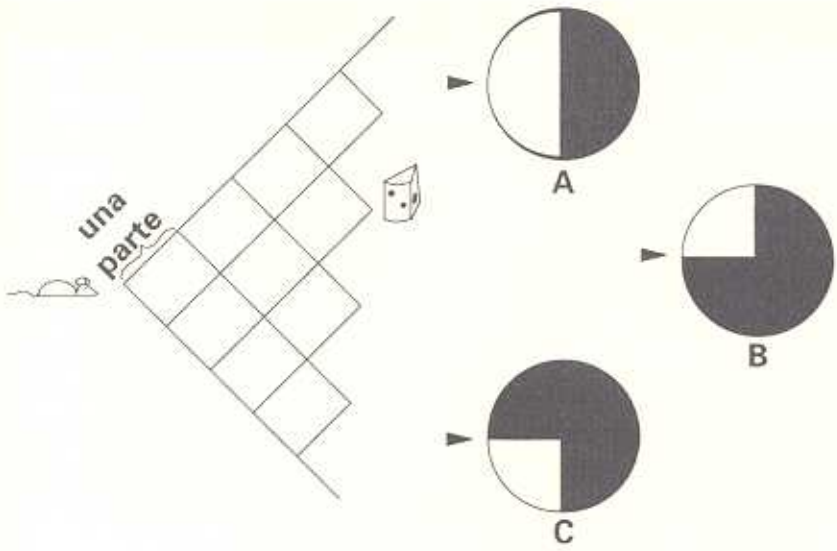
Tienen la misma probabilidad porque en las tres ruletas hay en total, + 3 y – 3.

_____

_____

_____

2. El siguiente juego consiste en mover al ratón para que llegue al queso. Si en la ruleta sale negro sube una parte, y si sale blanco baja una parte. ¿Qué ruleta convendrá elegir para que el ratón tenga más posibilidades de llegar al queso?



3. Carmen y Daniel han inventado un juego de dados con las siguientes reglas:

- Lanzan los dados sucesivamente, y calculan la diferencia de puntos entre el mayor y el menor.
- Si resulta una diferencia de 0, 1 ó 2, entonces Carmen gana una ficha.
- Si resulta 3, 4 ó 5 es Daniel quien gana una ficha.
- Comienzan con un total de 20 fichas, y el juego termina cuando no quedan más. ¿Le parece que este juego es equitativo? Si tuviera que jugar, ¿cuál jugador preferiría ser?

a) Practique con un compañero 5 veces este juego, y anote los resultados en la siguiente tabla:

	Diferencia de puntos	Recuento	Frecuencia
gana A	0		
	1		
	2		
gana B	3		
	4		
	5		
	Total de lanzamientos		100

- Observe los resultados. ¿Confirma su primera opinión sobre si es justo o no? _____

Actividad 5

De colores[6]

En esta actividad realizará un juego que lo llevará a construir la estrategia que a su juicio sea la óptima para lograr el mayor número de aciertos.

1. Resuelva la siguiente actividad con sus compañeros o familiares.

Material:

- Tres discos de papel o de cartón del mismo diámetro: el primero tiene las dos caras rojas, el segundo las dos caras azules y el tercero una roja y una azul.

Muestre a los jugadores los tres discos e introdúzcalos en una caja. Se saca cada vez, al azar, un disco de la caja, se muestra a los participantes el color de una de las caras y se les pide que adivinen el color de la otra. El disco utilizado se devuelve a la caja sin mostrar la otra cara y se saca nuevamente un disco, al azar. Esto se repite 10 veces. Cada participante debe completar un cuadro como el siguiente:

Color de la cara mostrada									
Color previsto para la cara oculta									

Al mismo tiempo que se va realizando la experiencia, uno de los participantes, que le sirve de auxiliar, anota el color de la cara oculta en cada extracción sin enseñárselo al resto de los compañeros. Al finalizar las diez extracciones comparan sus estimaciones con los resultados reales, y verifican quién tuvo más aciertos.

Antes de jugar una segunda ronda, se pide a los participantes que se agrupen en parejas. Cada pareja debe escribir una estrategia con la que le parezca que podría ganar. Por ejemplo, pueden proponer:

- elegir alternadamente azul y rojo;
- elegir siempre rojo;
- dar respuestas al azar.

Enseguida vuelven a jugar, y cada pareja aplica su estrategia. Al final, las parejas explican sus estrategias, las comentan entre todos, ven cuál produjo mejores resultados, intentan construir

[6] Bisson, *Du hasard, du probabilités. Quel enseignement des probabilités?* Memoria D.E.A. de Didáctica de las Matemáticas. IREM de Burdeos, 1983.

juntos una mejor estrategia y, si es el caso, la prueban. Antes de continuar, escriba aquí su estrategia: _____

_____

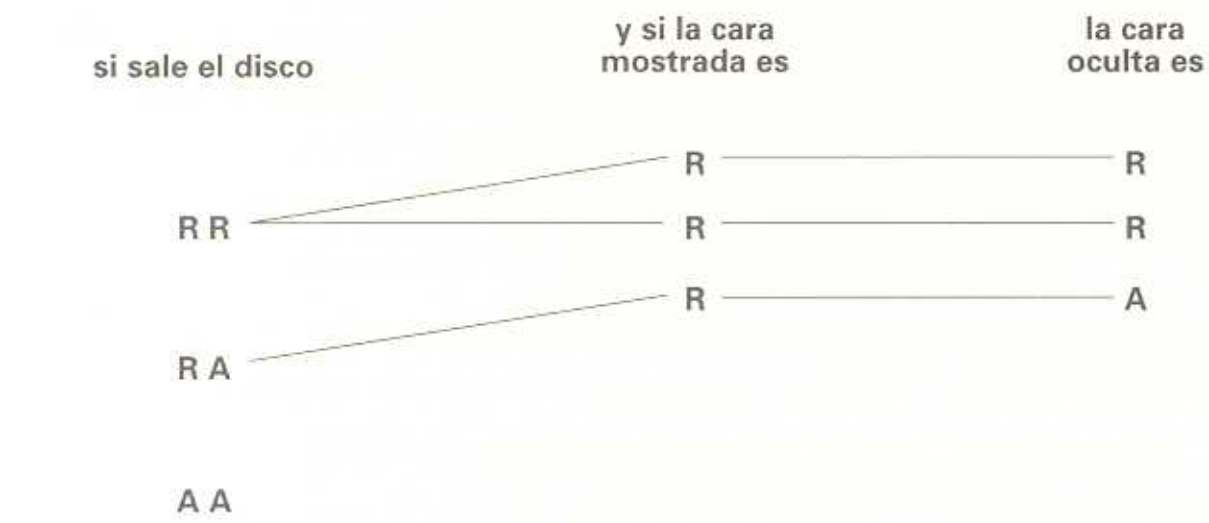
_____

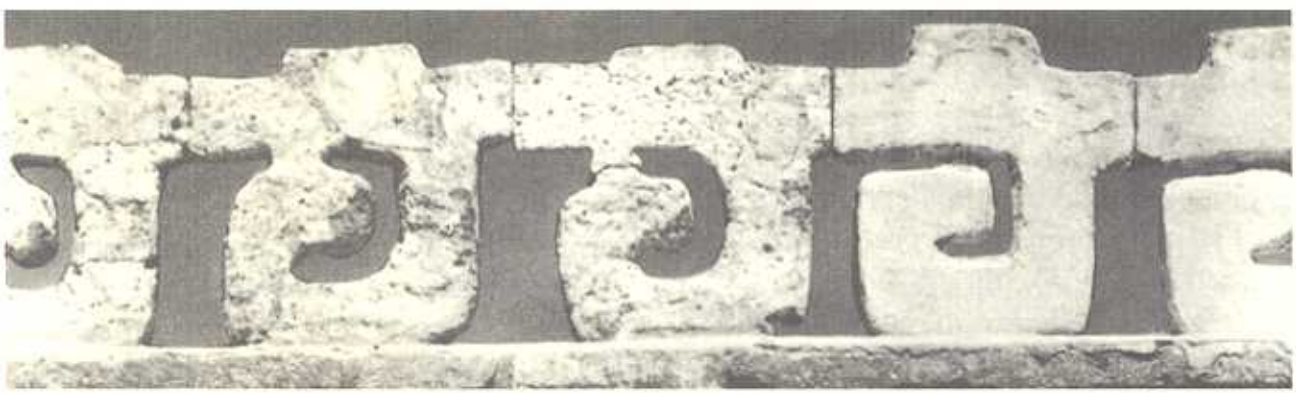
_____

De esta manera, seguramente surgirán diferentes estrategias que podrían ser las siguientes o algunas parecidas:

A: elegir siempre roja;
E: elegir siempre azul;
C: elegir el color contrario de la cara mostrada;

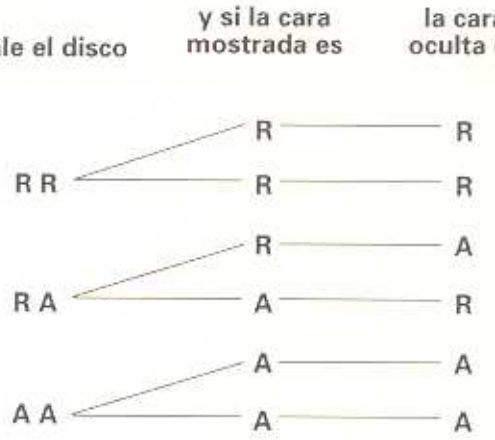
Para analizar las distintas estrategias puede hacerse un diagrama de árbol, el cual permite ver todos los resultados posibles:





- Complete el diagrama de árbol.

Una vez que se tienen los seis resultados posibles, se puede analizar cada estrategia viendo cuántos aciertos produce:



estrategias

A	B	C	D
	X		
	X		
	✓		
	X		
	✓		
	✓		

En esta situación, los seis sucesos posibles son: **RR**; **RR**; **RA**; **AR**; **AA**; **AA**.

Veamos como ejemplo el caso de la estrategia **B** "tomar siempre azul". Como puede verse, con esta estrategia, de los seis resultados posibles, en tres acierta.

- Complete las columnas correspondientes a las demás estrategias.

- Compare las distintas estrategias. ¿Con cuál se tiene mayor posibilidad de ganar? _____

Como usted habrá observado, con la estrategia **D**, de los seis resultados posibles, se obtienen 4 correctos, ¡es la mejor estrategia!

R R; R R; A A; A A

La probabilidad proporciona una excelente oportunidad a los alumnos de matematizar, es decir, de crear herramientas matemáticas para estudiar un fenómeno, una situación que no sea propiamente del campo de las matemáticas.

Es importante que durante los años de la escuela se enseñe a los niños a discutir, argumentar sus predicciones y a contrastarlas con lo que realmente sucede, es decir, que se les enseñe a ser dueños de su propia certidumbre.

Actividad 6

Relaciones importantes

Entre los distintos contenidos de Matemáticas existen importantes relaciones. Por ello, el propósito de la organización de los nuevos programas en ejes conceptuales, es propiciar la integración de los contenidos.

A lo largo de la primera y segunda parte del Taller, para profundizar en el análisis de estos contenidos, fue necesario trabajar con cada uno de ellos por separado: números, suma y resta, fracciones, etcétera, destacando en cada capítulo relaciones básicas entre algunos contenidos.

En esta actividad se analizan brevemente algunas de las relaciones entre dos o más contenidos de Matemáticas de la escuela primaria.

1. Muchas de las lecciones de los libros de texto relacionan algunos aspectos de un mismo eje, y en la medida de lo posible integran contenidos de dos o más ejes.

Identifique los distintos contenidos y ejes conceptuales en el tratamiento de las siguientes lecciones:

- L.T.M. 1°. Lecciones "El puesto de juguetes", pág. 66 y "Lo que nos gusta y lo que no", pág. 41. _____
  _____
- L.T.M. 2°. Lección "La vendedora de flores", pág. 61.
  _____
- L.T.M. 3°. Lección "El establo", pág. 84. _____
  _____
- L.T.M. 4°. Lección "El censo de población", pág. 128.
  _____
- L.T.M. 5°. Lección "Una visita al médico", pág. 80. _____
  _____
- L.T.M. 6°. Lección "A contar cubos", pág. 42. _____
  _____

¿Qué preguntas se podrían agregar en la lección "El puesto de juguetes", para trabajar algún aspecto de la ubicación espacial? _____
_____

Una señora, al mirar el retrato de un hombre, le dijo al padre: "La madre de ese hombre era la suegra de mi madre." ¿Qué parentesco hay entre la mujer y el hombre del cuadro?

En algunos casos la integración entre contenidos resulta indispensable. Por ejemplo, la mayor parte de las situaciones de medición implican la utilización de números. Al diseñar una actividad, esta integración puede enriquecerse; por ejemplo, en la lección "A contar cubos", en la que se relaciona el volumen de cubos y prismas (mediante la estimación y conteo de unidades cúbicas) con las nociones de múltiplos de un número, mínimo común múltiplo y con el análisis de tablas de variación proporcional. Además, se usa la calculadora y se resuelven problemas mediante el cálculo mental. Como en esta lección, usted puede organizar actividades que integren contenidos de dos o más ejes.

2. Escriba tres aspectos importantes en los que se relaciona el eje *Medición* con el eje *Los números, sus relaciones y sus operaciones*.

_____

_____

3. A continuación se presentan algunos temas de matemáticas que se trabajan en la escuela primaria.

a) Indique, con líneas, cuáles se pueden relacionar.

Fracciones

Porcentajes

Decimales

Variación proporcional directa

Razón

Multiplicación de números naturales

Medición

(Perímetro de polígonos regulares)
(Cálculo de áreas)
(Perímetro del círculo)

Propiedades de las figuras geométricas

b) Describa una actividad en la que se relacionen dos de los temas que vinculó en el diagrama anterior.

_____

_____

c) Describa una actividad en la que se relacione la variación proporcional con el cálculo del perímetro de figuras regulares.

_____

_____

Se tienen 3 monedas, una de ellas es falsa y pesa menos que las otras. Con una balanza, sin usar pesas, encontrar la moneda falsa con sólo 1 pesada.

Existen múltiples relaciones entre los contenidos de todos los ejes; sin embargo, algunas son fundamentales. En particular, los contenidos del eje "Medición" proporcionan contextos básicos para desarrollar los demás ejes.

4. Escriba a la derecha de cada actividad algunos contenidos específicos que están implicados.

Actividades	Contenidos
• Construcción de una maqueta.	_____
• Realización de una encuesta y registro de los resultados.	_____ _____
• Determinar la cantidad de dinero que debe aportar cada niño para organizar la fiesta de fin de año.	_____ _____ _____ _____
• Construir un librero para el salón.	_____ _____
• Tejer un suéter siguiendo las instrucciones de un modelo.	_____ _____
• Hacer un bordado con figuras simétricas.	_____ _____
• Trazar una cancha de futbol.	_____ _____
• Jugar dominó.	_____

• Organizar y realizar una competencia deportiva. _____

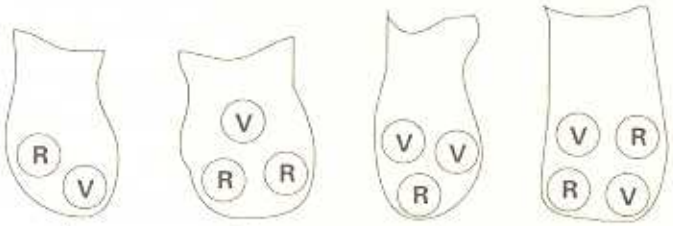
Actividades como las anteriores, implican la utilización flexible de numerosos contenidos matemáticos.

Por ejemplo, al ***Construir una maqueta****, se trabaja con diferentes contenidos como: medición de longitudes, de superficies, escala, trazo de figuras.*

Si bien no es posible propiciar el aprendizaje de los distintos aspectos de las matemáticas únicamente con actividades como las anteriores, ellas son interesantes por la gran diversidad de contenidos que están en juego, y por su carácter práctico o lúdico.

¿Qué hemos aprendido en este capítulo?

1. La siguiente ilustración representa 4 bolsas que contienen canicas de colores rojo (**R**) y verde (**V**).



a) b) c) d)

• El experimento consiste en extraer una canica, sin mirar, y luego introducirla nuevamente a la bolsa para realizar otra extracción.

a) Conteste **V** (verdadero) o **F** (falso) a las siguientes cuestiones:

Es más fácil obtener **R** en a) que en b) ( )

Es más fácil obtener **R** en b) que en d) ( )

Es más fácil obtener **R** en a) que en d) ( )

Es más fácil obtener **R** en a) que en c) ( )

Es más fácil obtener **R** en b) que en c) ( )

b) Juan eligió una de estas bolsas para hacer extracciones de canicas y obtuvo el siguiente resultado: **R R V V R R R V R**. ¿Con qué bolsa es más probable que haya estado jugando?

_____

2. A continuación se dan cuatro propósitos en relación a la enseñanza de la probabilidad. Ponga una cruz a los que no correspondan a la primaria.

( ) Distinguir, en algunos casos, situaciones deterministas de situaciones aleatorias.
( ) Organizar con diferentes medios, los casos posibles en una situación de azar.
( ) Comparar la frecuencia de distintos eventos para determinar cuál es más probable, en situaciones en las que el total de eventos posibles no cambió.
( ) Determinar qué evento es más probable en situaciones en las que es necesario considerar la frecuencia relativa.

Anexo de respuestas

Capítulo I

Tema 1

Actividad 1

2. b) Les toca lo mismo.

Actividad 3

1. b) La barrita entera mide 8 cm o $\frac{4}{3}$ de la parte que le tocó a cada niño.

3. A la porción hay que quitarle $\frac{1}{3}$ **de barrita entera** y no $\frac{1}{3}$ de porción. Equivale a quitar $\frac{1}{4}$ de porción. Como a cada niño le tocó una porción igual a $\frac{4}{3}$, entonces cada porción es igual a $\frac{4}{3}$ de barrita. Se divide la porción en 4 partes iguales y se le quita $\frac{1}{4}$, porque cada barrita es igual a $\frac{3}{3}$.

5. d) Algunas de las respuestas son: 3 barritas y 2 niños; 6 barritas y 4 niños; 9 barritas y 6 niños.

7. Varias respuestas son posibles, algunas de ellas son: 7 barritas y 4 niños; 14 barritas y 8 niños; etcétera.

Tema 2

Actividad 1

5. La tira **Q** mide 5 cm.

Actividad 4

3. d) La hora.

4. Reparto 6: A cada niño le toca $\frac{1}{3}$ de todo ó $\frac{4}{3}$ de pastel.

Actividad 5

3. d) $\frac{1}{3}$ de los mosaicos tienen dibujo.

Actividad 7

2. Por ejemplo, $\frac{3}{7} + \frac{1}{3}$.

Tema 3

Actividad 1

2.

	Tiras enteras	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
Largo del pizarrón	8	0	0	1	1	0

4. No se puede expresar exactamente $\frac{1}{3}$ con las fracciones $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, etcétera. Se pueden dar aproximaciones tan precisas como se quiera.

9. Ha crecido en un año **0.001 tiras.**

Actividad 3

3. a) 8.05 pesos.

b) 8.5 pesos u 8.50 pesos.

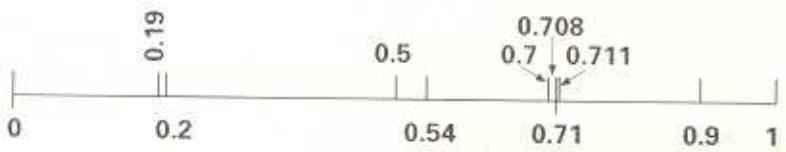
4. El punto señalado con la flecha en la recta **A** representa $\frac{3}{10}$ de metro ó 30 centímetros.

El punto señalado con la flecha en la recta **C** representa $\frac{4}{10}$ de hora ó 24 minutos.

El punto señalado con la flecha en la recta **F** representa $2\frac{2}{10}$ de kilogramo ó 2 200 gramos.

Actividad 4

4.

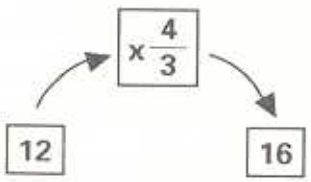


6. Por ejemplo, 3.2561

Tema 4

Actividad 1

2.



4.

Número de vueltas	Total de kilómetros
$1\frac{1}{3}$ ó $\frac{4}{3}$	16 km
$7\frac{1}{2}$	90 km

5. b) $1\frac{1}{8}$ ó $\frac{9}{8}$ vueltas

Actividad 3

4. Las medidas de la casita **K** son: **a** = $\frac{15}{8}$; **b** = $\frac{30}{8}$ ó $\frac{15}{4}$;
c = $\frac{60}{8}$ ó $\frac{15}{2}$; **d** = $\frac{30}{8}$ ó $\frac{15}{4}$

Actividad 4

3. b) $\frac{7}{4}$ ó $1\frac{3}{4}$ de los que asistieron a la obra 1.

d) 3 veces los que asistieron a la obra 1.

4 b) A Luis, $\frac{2}{12}$ ó $\frac{1}{6}$ de las ganancias.

c)

	A Luis	A Mario	A José
1ª semana: 90 pesos	15 pesos	30 pesos	45 pesos

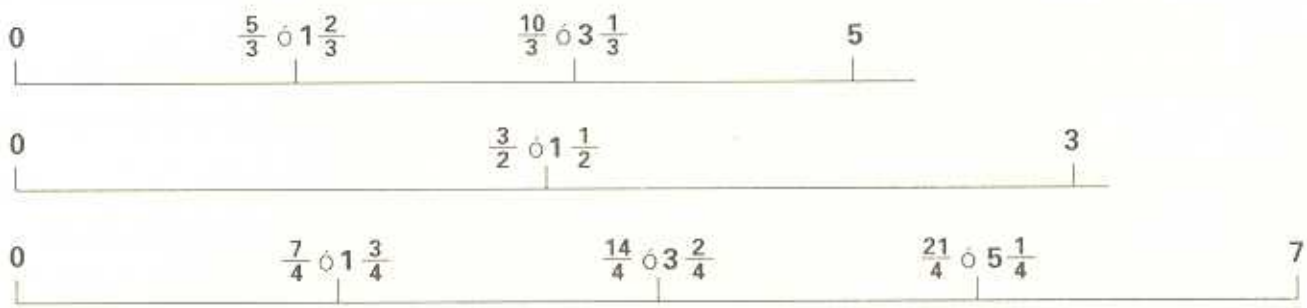
Tema 5

Actividad 3

1. La tira **A** es igual a 4 unidades entre 3, por lo tanto:

A = $\frac{4}{3}$ de **U** $1\frac{1}{3}$ de **U**

2.



3. El espesor de una hoja es igual a 4 mm entre 50, es decir $\frac{4}{50}$ de mm.

¿Qué hemos aprendido en este capítulo?

1. a) El tornillo mide $\frac{3}{8}$ de pulgada: ***partes de unidad.***

La fracción significa en este caso que una pulgada se divide en ocho partes de las que se toman tres.

1. b) La producción de este año fue 0.5 veces la del año pasado: ***operador multiplicativo.***

La fracción indica, en este caso, el número de veces que se considera una medida.

c) Si al dar **a** pasos se avanzan **b** metros, en cada paso se avanza, en promedio, $\frac{b}{a}$ metros: ***división de enteros.***

La medida de un paso se obtiene dividiendo **b entre a**, por lo tanto $\frac{b}{a}$ expresa ese cociente.

d) Más de tres cuartos de la población mayor de edad acudió a votar: ***partes de unidad.***

e) La velocidad promedio de un vehículo que avanza una distancia **d** en un tiempo **t** es $\frac{d}{t}$: ***división de enteros.***

f) $\frac{2}{5}$ de 10 metros es igual a 4 metros: ***operador multiplicativo.***

Para calcular $\frac{2}{5}$ **de** 10 metros, se aplica el operador multiplicativo $\frac{2}{5}$ a 10 metros.

2. Orden de dificultad: **c, a, b.**

El problema **c**, implica una multiplicación de números naturales. En cambio los otros dos implican multiplicaciones con fracciones.

En el problema **a**, el multiplicador es un número entero (6) y por lo tanto la multiplicación puede ser interpretada como una suma repetida:

$\frac{8}{10} + \frac{8}{10} + \ldots + \frac{8}{10}$. En cambio en el problema **b** el multiplicador es una fracción.

3. $\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{5}$. En este caso, para saber qué fracción es mayor, basta con comparar los numeradores.

$\frac{3}{7}$ y $\frac{3}{9}$. En este caso, para saber qué fracción es mayor, basta con comparar los denominadores.

$\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{4}$. Una estrategia para comparar este tipo de fracciones es, por ejemplo, comparar cada una de ellas con la unidad. Se concluye que $\frac{2}{3}$ es más chica que la unidad y $\frac{5}{4}$ es más grande.

$\frac{4}{7}$ y $\frac{5}{9}$. En este caso, es difícil saber qué fracción es mayor sin obtener fracciones equivalentes con igual denominador, porque ambas son menores que la unidad.

4. Existe un número infinito de fracciones entre $\frac{87}{100}$ y $\frac{88}{1000}$, por ejemplo la fracción $\frac{875}{1000}$

5. Los números quedan ubicados de la siguiente manera:
0, **0.6,** 0.62, **0.625,** 0.63, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, **1.099,** 1.1, **1.99,** 2, $\frac{625}{100}$

6. A cada niño le toca: 1 barrita y $\frac{1}{4}$ ***de*** barrita ó $\frac{5}{4}$ ***de*** barrita.

7. La línea que dibujó debe medir 10 cm.

8. La parte de la población menores de 18 años es $\frac{3}{5}$.

Los menores de 18 años inscritos en la escuela son $\frac{3}{4}$ ***de*** $\frac{3}{5}$ de la población, es decir $\frac{9}{20}$ de la población.

9. Para encontrar el operador que transforma el dibujo original, se puede buscar el número que multiplicado por 6, da 9. Ese número es una fracción. Una manera de encontrarla es buscar primero el operador que transforma 6 en 1: es $\frac{1}{6}$. El que transforma 6 en 9 es entonces $\frac{9}{6}$ ó $\frac{3}{2}$.

Otra manera de encontrar esa fracción es, simplemente, usar el significado de la fracción como cociente: el número que multiplicado por 6 da 9, es el cociente de 9 entre 6, es decir, es $\frac{9}{6}$ ó $\frac{3}{2}$.

Por lo tanto, en la figura ampliada, **c** mide $\frac{3}{2}$ ***de*** 12 cm, es decir 18 cm; y **d** mide $\frac{3}{2}$ ***de*** 15 cm, es decir, 22.5 cm.

10. Cada pedazo mide $\frac{2}{15}$ ***de*** metro.

11. a) Repartos equitativos y exhaustivos con magnitudes continuas (longitudes, superficies), sin cuantificar el resultado. ***2***

b) Las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, en contextos de reparto y medición. ***2***

c) Repartos entre 3 ó 5, cuantificando el resultado con una suma de fracciones. ***2*** y ***3***

d) Algoritmo para la división de fracciones. ***X***

e) La fracción $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ como el resultado de la división **a** ÷ **b** en contextos de reparto. ***3***

f) Introducción a la multiplicación de fracciones a partir de situaciones como $\frac{3}{4}$ ***de*** 60 metros, 4 $\frac{2}{3}$ veces, $\frac{1}{2}$ ***de*** $\frac{3}{4}$ etc. ***2*** y ***3***

g) La equivalencia de fracciones a nivel concreto (a partir de material concreto o de dibujos). ***2*** y ***3***

h) Regla para obtener fracciones equivalentes. ***3***

i) Casos simples de comparación de fracciones en contextos de medición (por ejemplo, fracciones con el mismo numerador o denominador). ***2*** ó ***3***

j) Suma y resta de fracciones con distinto denominador. ***3***

Capítulo II

Tema 1

Actividad 1

1. a) Tabla 1

Número de vueltas de la rueda A	0	2	4	6	8	10	12	16
Número de vueltas de la rueda B	0	3	6	9	12	15	18	24

b) Tabla 2

Precio en pesos	**Distancia recorrida en metros**
2	0
2.50	500
3	1 000
6	4 000
8	6 000
10	8 000
12	10 000
16	14 000

c) Tabla 4

Masa en gramos	1.6	2.4	4	5.6	8	9.6	12
Volumen en cm ^{3}	2	3	5	7	10	12	15

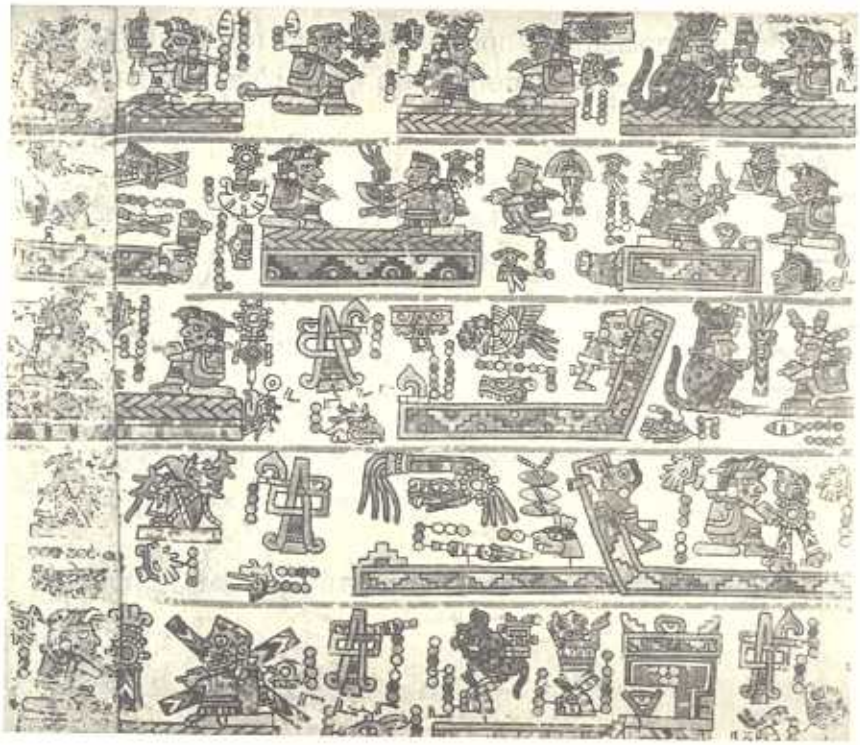
e) Sí, excepto en la tabla 3. El peso de un niño depende de una gran variedad de factores que hacen imposible preveer con precisión lo que pesará en sus siguentes años.

2. a) Las tablas 1, 2 y 4 cumplen con esta propiedad.

b) Las tablas 1 y 4 cumplen con esta propiedad.

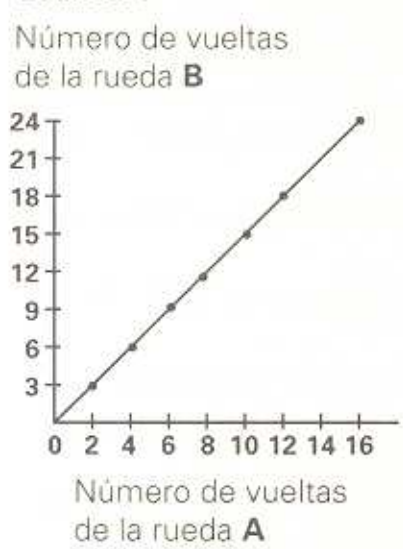
c) Las tablas 1 y 4 cumplen con esta propiedad.

d) Las tablas 1, 2 y 4 cumplen con esta propiedad.

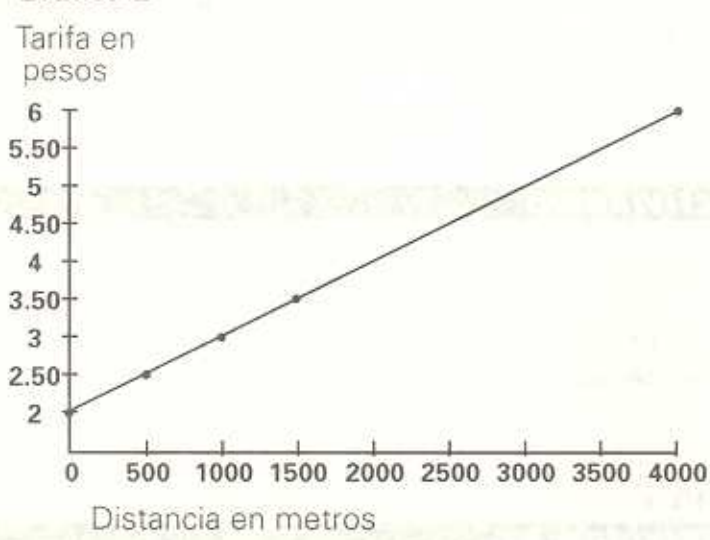


3.

Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3

Gráfica 4

4. a) Gráficas 1, 2 y 4.

b) Gráficas 1, 2 y 4.

c) Gráficas 1 y 4.

d) Los puntos representados están en una línea recta que pasa por el origen.

Actividad 2

2. Ambos procedimientos son correctos. Las medidas del largo y el ancho de los rectángulos cuyas diagonales coinciden, son proporcionales entre sí.

Actividad 3

1. En el artículo "¿Qué significa multiplicar por $\frac{7}{4}$?" (*Lecturas*, pág.177) encontrará varios procedimientos para construir el rompecabezas.

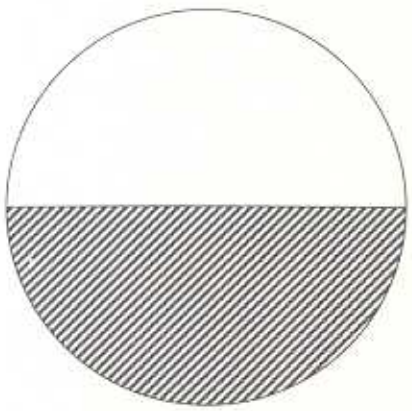
Tema 2

Actividad 1

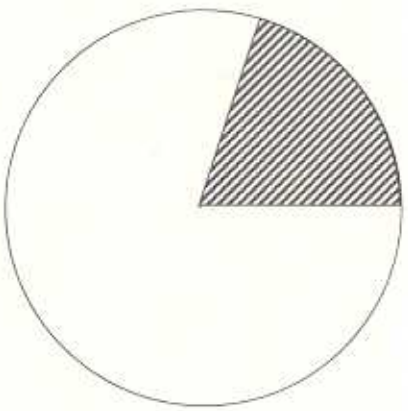
1. b) $\frac{2}{5}$ del grupo es equivalente a $\frac{4}{10}$ del grupo. Dado que $\frac{4}{10}$ es mayor que $\frac{1}{10}$, reprueban más en el grupo **E**.

En el grupo **B** y **C** reprobó la quinta parte.

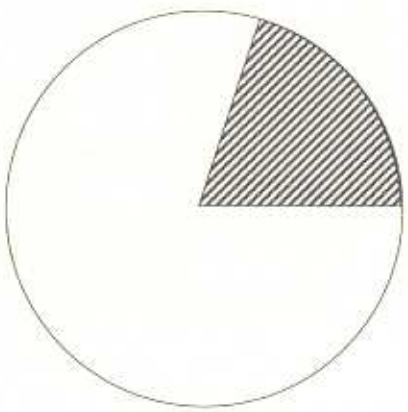
1. c)



Grupo A



Grupo B



Grupo C

2. a) 20 alumnos.

3.

reprobados	con respecto a:
20	30
6.66	10
66.6	100

reprobados	con respecto a:
20	30
200	300
66.6	100

4. a) El 33.33% de la población tiene menos de 14 años.

b) El 60% de la población que tiene entre 14 y 64 años.

c) El 6.66% de la población que tiene más de 64 años.

d) El número de habitantes que tiene menos de 14 años es aproximadamente de 5 000 000 de habitantes.

e) El número de habitantes que tiene entre 14 y 64 años es igual a 9 001 703 habitantes.

f) El número de habitantes que tiene más de 64 años es aproximadamente de 1 000 000 de habitantes.

Actividad 3

1. a) Comunidades de Oaxaca en donde:

Más de la mitad son hombres: **B**, **C** y **G**

Cerca de la tercera parte de la población son hombres: **H**

Actividad 4

1. a) Sí es posible que aumente el 100%. Significa que ahora el precio es el doble que hace 5 años.

1. b) No es posible. Significaría que **toda** la población entrevistada **más un quinto** de la misma, lee por lo menos un libro al año.

Tema 3

Actividad 1

1. a) 9 rectángulos

2.

Los rectángulos

Base en cm	36	18	12	9	6	4	3	2	1
Altura en cm	1	2	3	4	6	9	12	18	36

La renta

Nº de personas	**Precio por persona**
8	$ 150
6	$ 200
5	$ 240
4	$ 300
3	$ 400
2	$ 600

El petróleo

Tiempo en días	**Nº de barriles por día**
40	1
30	$\frac{4}{3}$
20	2
10	4
5	8

5. Las definiciones correctas son: **b)** y **c)**

¿Qué aprendimos en este capítulo?

1. a) variación no proporcional

b) variación no proporcional

c) variación no proporcional

d) variación proporcional inversa

2. a) 60 puntos

b) 60 vueltas

c) 20 puntos

d) 30 vueltas

3.

Tiempo en horas	distancia en km
$\frac{1}{2}$	40
$1\frac{1}{2}$	120
2	160
$2\frac{1}{2}$	200
$2\frac{3}{4}$	220

4. a) Las magnitudes **A** y **B** no varían proporcionalmente. Tampoco las magnitudes **C** y **D**.

4. b)

Lado en centímetros	Perímetro del cuadrado
0	0
0.5	2
1	4
1.5	6
0.75	3
3	12

5. a) 50%

b) 75%

c) 60%

d) 25%

e) 12.5%

f) 16.6%

6. Aumentó el 50%.

7. a) Conviene propiciar el procedimiento II.

b)

Número de vueltas de la rueda A	Número de vueltas de la rueda B
5	7
6	8.4

Este problema es más difícil que el anterior porque es necesario calcular el valor unitario.

8.

(1) Resolución de problemas de proporcionalidad directa aplicando propiedades como: al doble le corresponde el doble, etcétera.

(2) Resolución de problemas de proporcionalidad directa mediante el cálculo del valor unitario.

(3) Resolución de problemas de proporcionalidad directa aplicando "la regla de tres".

Capítulo III

Actividad 1

1.

	Antigüedad	Capacidad craneana aproximada
Australopithecus	3 000 000 años	780 cm^3
Hombre de Java	7 000 000 años	1 020 cm^3
Hombre de Pekín	500 000 años	1 260 cm^3
Hombre de Neanderthal	100 000 años	1 500 cm^3
Hombre moderno	40 000 años	1 560 cm^3

3. a)

1950 (41.7%)

1970 (46.3%)

1990 (38.3%)

b)

1950 (54.6%)

1970 (50.1%)

1990 (56.8%)

c)

1950 (3.4%)

1970 (3.6%)

1990 (4.2%)

4. c) La mediana de la superficie que se destina a cada cabeza de ganado entre 1940 y 1980 es de **3.15** millones de hectáreas.

¿Qué hemos aprendido en este capítulo?

1. **a)** 75 años

   b) 66 años

   c) Como se presentan un número par de datos, la mediana es el promedio de los dos valores intermedios, es decir $\frac{70 + 69}{2} = 69.5$

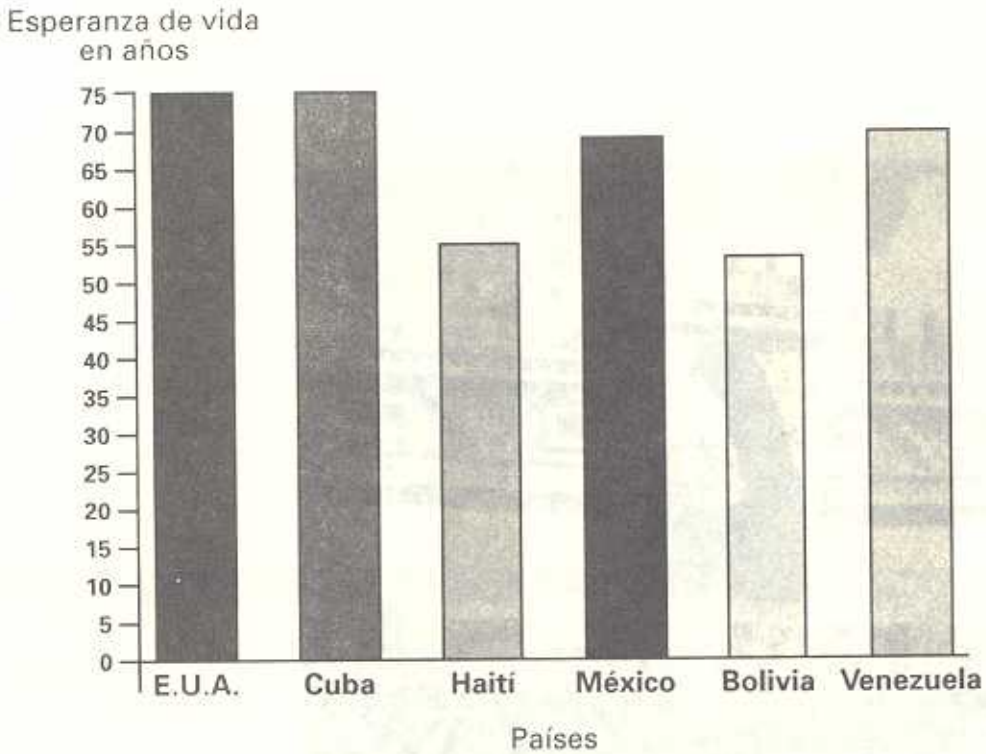
   Por lo tanto, aproximadamente la mediana es de 69 años.

   d) Entre 470 y 7 180 habitantes por médico.

   e) Entre 53 y 75 años.

   f) Mientras mayor es el número de habitantes por médico, menor es la esperanza de vida.

2.



Capítulo IV

Actividad 3

1. e) 35 caminos diferentes para llegar de **A** a **B**, sin pasar dos veces por el mismo punto.

f) Con las cifras 1, 2, 3 y 4, se pueden hacer 256 placas.

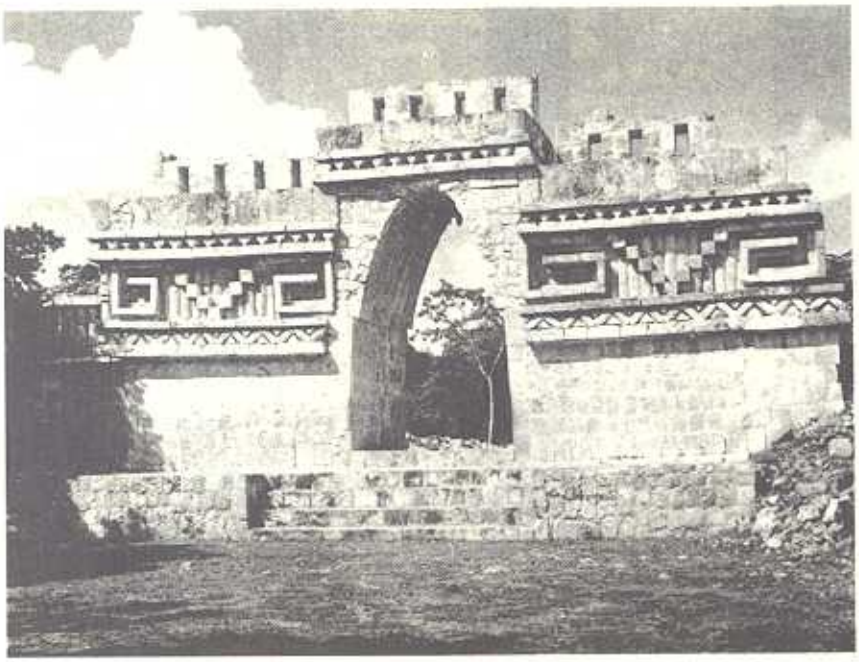
¿Qué hemos aprendido en este capítulo?

1. a)

Es más fácil obtener **R** en **a)** que en **b)**	(F)
Es más fácil obtener **R** en **b)** que en **d)**	(V)
Es más fácil obtener **R** en **a)** que en **d)**	(F)
Es más fácil obtener **R** en **a)** que en **c)**	(V)
Es más fácil obtener **R** en **b)** que en **c)**	(V)

b) Con la bolsa **b)**.

2. Todos los propósitos corresponden a la primaria, excepto el último.



Bibliografía consultada

Algunas de las secuencias de situaciones didácticas que se plantean en esta obra, constituyen adaptaciones de situaciones que han sido reportadas en libros o artículos especializados, o en informes de investigación no publicados. A continuación se especifican dichas fuentes.

Capítulos I al IV

Block, David, Irma Fuenlabrada y Hugo Balbuena, *Dialogar y descubrir. Matemáticas. Cuaderno de Trabajo.* Nivel III, SEP-CONAFE-CINCESTAV-IPN, México, 1992.

Fuenlabrada, Irma (responsable ante CONACyT), David Block y Myriam Nemirovsky (corresponsables), *Formación de profesores sobre áreas fundamentales de la educación básica.* Informe final de la investigación, DIE-CINVESTAV-IPN, México, 1990.

Fuenlabrada, Irma, David Block, Hugo Balbuena y Alicia Carvajal, *Juega y aprende matemáticas. Propuestas para divertirse y trabajar en el aula.* (Libros del Rincón) SEP, México, 1991.

Rockwell, Elsie, David Block, Antonia Candela, Irma Fuenlabrada, Laura Navarro y Eva Taboada (coordinación general), David Block, Irma Fuenlabrada y Hugo Balbuena (autores) *Dialogar y descubrir. Manual del instructor comunitario. Nivel III,* Apartado de Matemáticas. SEP-CONAFE-CINVESTAV-IPN, México, 1992.

Rockwell, Elsie (coordinación general), David Block e Irma Fuenlabrada (autores) *Dialogar y descubrir. Manual del instructor comunitario. Niveles I y II,* Apartado de Matemáticas. SEP-CONAFE-CINVESTAV-IPN, México, 1992.

Capítulo I

Las fracciones

Balbuena, Hugo, Cristina Espinosa, Hugo Espinosa, Dilma Fregona e Irma Saiz, *Descubriendo las fracciones,* Laboratorio de Psicomatemática, DIE-CINVESTAV-IPN, México, 1988.

Capítulo IV

Actividad 3

1. e) 35 caminos diferentes para llegar de **A** a **B**, sin pasar dos veces por el mismo punto.

f) Con las cifras 1, 2, 3 y 4, se pueden hacer 256 placas.

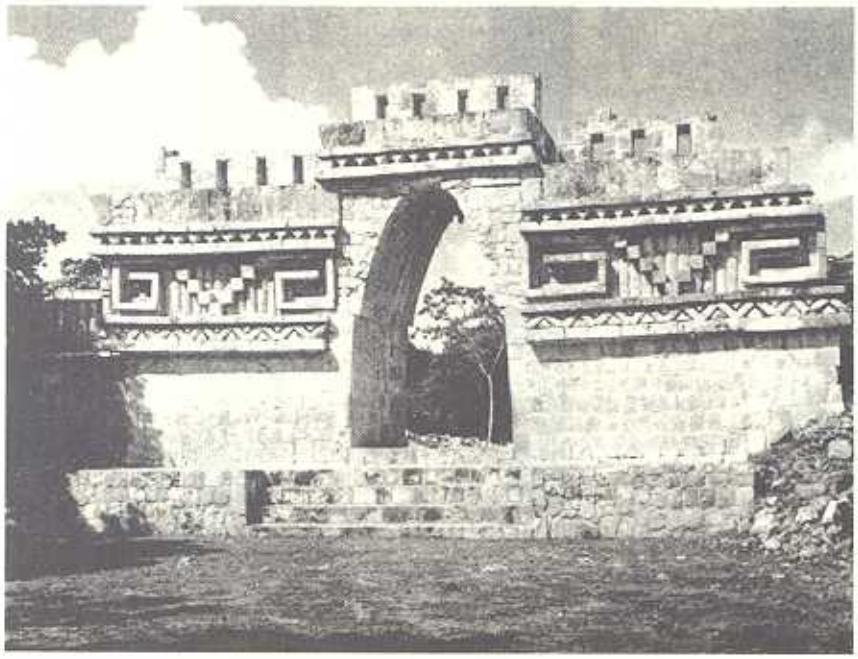
¿Qué hemos aprendido en este capítulo?

1. a)

Es más fácil obtener **R** en **a)** que en **b)**	(F)
Es más fácil obtener **R** en **b)** que en **d)**	(V)
Es más fácil obtener **R** en **a)** que en **d)**	(F)
Es más fácil obtener **R** en **a)** que en **c)**	(V)
Es más fácil obtener **R** en **b)** que en **c)**	(V)

b) Con la bolsa **b)**.

2. Todos los propósitos corresponden a la primaria, excepto el último.



Bibliografía consultada

Algunas de las secuencias de situaciones didácticas que se plantean en esta obra, constituyen adaptaciones de situaciones que han sido reportadas en libros o artículos especializados, o en informes de investigación no publicados. A continuación se especifican dichas fuentes.

Capítulos I al IV

Block, David, Irma Fuenlabrada y Hugo Balbuena, *Dialogar y descubrir. Matemáticas. Cuaderno de Trabajo.* Nivel III, SEP-CONAFE-CINCESTAV-IPN, México, 1992.

Fuenlabrada, Irma (responsable ante CONACyT), David Block y Myriam Nemirovsky (corresponsables), *Formación de profesores sobre áreas fundamentales de la educación básica.* Informe final de la investigación, DIE-CINVESTAV-IPN, México, 1990.

Fuenlabrada, Irma, David Block, Hugo Balbuena y Alicia Carvajal, *Juega y aprende matemáticas. Propuestas para divertirse y trabajar en el aula.* (Libros del Rincón) SEP, México, 1991.

Rockwell, Elsie, David Block, Antonia Candela, Irma Fuenlabrada, Laura Navarro y Eva Taboada (coordinación general), David Block, Irma Fuenlabrada y Hugo Balbuena (autores) *Dialogar y descubrir. Manual del instructor comunitario. Nivel III,* Apartado de Matemáticas. SEP-CONAFE-CINVESTAV-IPN, México, 1992.

Rockwell, Elsie (coordinación general), David Block e Irma Fuenlabrada (autores) *Dialogar y descubrir. Manual del instructor comunitario. Niveles I y II,* Apartado de Matemáticas. SEP-CONAFE-CINVESTAV-IPN, México, 1992.

Capítulo I

Las fracciones

Balbuena, Hugo, Cristina Espinosa, Hugo Espinosa, Dilma Fregona e Irma Saiz, *Descubriendo las fracciones,* Laboratorio de Psicomatemática, DIE-CINVESTAV-IPN, México, 1988.

Block, David, *Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria,* tesis de maestría, DIE-CINVESTAV-IPN, México, 1987.

Block, David (coordinador), Proyecto de investigación. *Estudio didáctico de la noción de división y fracción en la escuela primaria,* (Documento Interno), DIE-CINVESTAV-IPN, México, 1993.

Brousseau, Guy, "Problémes de l'enseignement des décimaux", en *Recherches en didactique des Mathématiques,* Núm. 1, vol. 1, Francia, 1980.

Brousseau, Guy. "Problémes de l'enseignament des décimaux", en *Recherches en didactique des Mathématiques,* Núm. 2, vol. 1, Francia, 1981.

Dávila, Martha, "El reparto y las fracciones", en *Educación Matemática,* Núm. 1, vol 4, México, 1992.

Streefland, L., "Young Children (6 - 8). Ratio and Proportion" en *Educational Studies in Mathematics,* Núm. 10, Boston, USA, 1979.

Capítulo II

Procesos de cambio

Aucagne, Jacques, Documento de trabajo presentado en el Coloquio de Guéret, Francia, 1985.

Brousseau, Guy y Nadine Brousseau, *Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire - comptes rendus d'observations de situations et de processus didactiques à l'école Jules Michelet de Talence. Document pour les enseignants et pour les formateurs.* IREM. Bordeaux, Francia, 1987.

Gálvez, Grecia y S. Navarro, *Proporcionémonos instrumentos para el trabajo en el aula,* Material de referencia para un curso de actualización para docentes de matemáticas. Resolución de problemas y uso de calculadora de bolsillo en el aula (mimeo), UNESCO, Santiago de Chile, 1989.

Noelting, Gerald, "The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem solving strategies and mechanism of adaptive restructuring", en *Educational Studies in Mathematics,* Núm. 11, Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holland., p. 331 - 363.

Capítulo III

Tratamiento de la información

Alarcón, Jesús, Silvestre Cárdenas, Blanca Parra, Juan José Rivaud, Ma. Guadalupe Lucio y Alba Rojo, *Matemáticas 1*, SEP-FCE, México, 1991.

Alarcón, Jesús, Guillermina Waldegg, Blanca Parra, Juan José Rivaud, Ma. Guadalupe Lucio y Alba Rojo, *Matemáticas 2*, SEP-FCE, México, 1991.

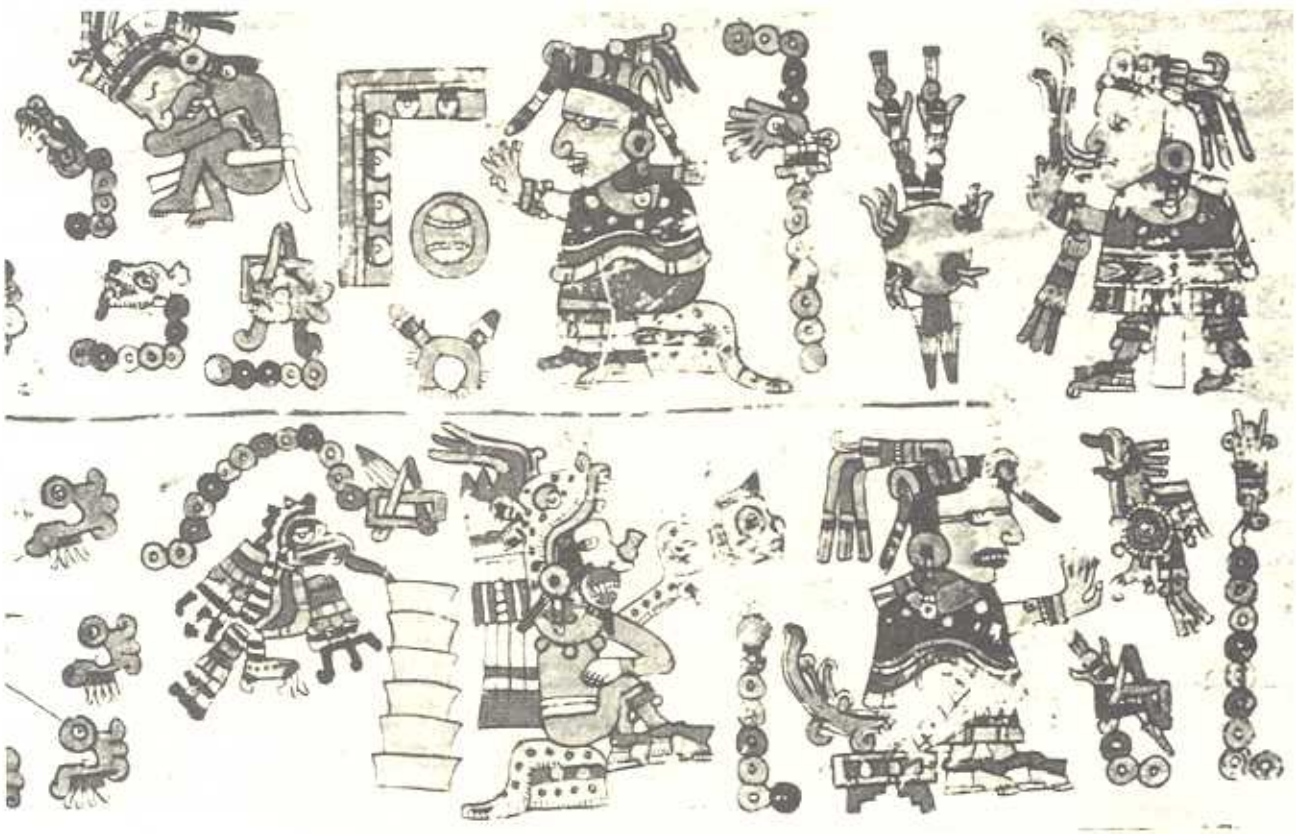
Capítulo IV

La predicción y el azar

Alarcón, Jesús, Silvestre Cárdenas, Blanca Parra, Juan José Rivaud, Ma. Guadalupe Lucio y Alba Rojo, *Matemáticas 1*, SEP-FCE, México, 1991.

Alarcón, Jesús, Guillermina Waldegg, Blanca Parra, Juan José Rivaud, Ma. Guadalupe Lucio y Alba Rojo, *Matemáticas 2*, SEP-FCE, México, 1991.

Godino, J., *Azar y probabilidad*, Síntesis, Madrid, 1987.



Capítulo III

Tratamiento de la información

Alarcón, Jesús, Silvestre Cárdenas, Blanca Parra, Juan José Rivaud, Ma. Guadalupe Lucio y Alba Rojo, *Matemáticas 1*, SEP-FCE, México, 1991.

Alarcón, Jesús, Guillermina Waldegg, Blanca Parra, Juan José Rivaud, Ma. Guadalupe Lucio y Alba Rojo, *Matemáticas 2*, SEP-FCE, México, 1991.

Capítulo IV

La predicción y el azar

Alarcón, Jesús, Silvestre Cárdenas, Blanca Parra, Juan José Rivaud, Ma. Guadalupe Lucio y Alba Rojo, *Matemáticas 1*, SEP-FCE, México, 1991.

Alarcón, Jesús, Guillermina Waldegg, Blanca Parra, Juan José Rivaud, Ma. Guadalupe Lucio y Alba Rojo, *Matemáticas 2*, SEP-FCE, México, 1991.

Godino, J., *Azar y probabilidad*, Síntesis, Madrid, 1987.